ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1.1. Τυχαία γεγονότα ή ενδεχόμενα

Ο Λογισμός των πιθανοτήτων ασχολείται με την αναζήτηση και τη μελέτη των νόμων της τύχης με τους οποίους προσπαθούμε να ερμηνεύσουμε τα τυχαία εκείνα γεγονότα που παρουσιάζουν το χαρακτηριστικό της αβεβαιότητας.

Τυχαία γεγονότα ή **ενδεχόμενα** λέγονται τα γεγονότα εκείνα των οποίων δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα τα αποτελέσματα.

Το χαρακτηριστικό γνώρισμα των τυχαίων γεγονότων είναι ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις διάφορες διαδοχικές δοκιμές (**πειράματα** ή **παρατηρήσεις**), οι οποίες επαναλαμβάνονται με τις ίδιες συνθήκες, δεν είναι πάντοτε τα ίδια και δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποια συγκεκριμένη αιτία για την ακανόνιστη αυτή εμφάνισή τους.

Αντίθετα, αν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις διάφορες δοκιμές, οι οποίες επαναλαμβάνονται με τις ίδιες συνθήκες, είναι πάντοτε τα ίδια, όσες φορές και αν επαναλαμβάνονται, τότε τα γεγονότα στα οποία αναφέρονται οι δοκιμές αυτές τα ονομάζουμε **βέβαια** ή **αιτιοκρατικά** και δεν αποτελούν αντικείμενο μελέτης του Λογισμού των πιθανοτήτων, ο οποίος ασχολείται μόνο με τον υπολογισμό του μέτρου της αβεβαιότητας των τυχαίων γεγονότων ή ενδεχομένων.

Ας πάρουμε ως παράδειγμα τη ρίψη ενός κανονικού ζαριού. Σε κάθε ρίψη η εμφάνιση μιας από τις 6 έδρες του ζαριού είναι γεγονός βέβαιο, ενώ το ποιος αριθμός θα εμφανιστεί δεν το γνωρίζουμε και, κατά συνέπεια, είναι για μας τυχαίο γεγονός.

Επίσης, το ότι ένα άτομο κάποτε θα πεθάνει είναι **βέβαιο γεγονός,** ενώ το πότε θα πεθάνει είναι **γεγονός τυχαίο.**

Ακόμη η διάρκεια ζωής μιας ηλεκτρικής λάμπας πάνω από 900 ώρες λειτουργίας είναι γεγονός αβέβαιο κ.λπ. Αν θέλουμε τα συμπεράσματά μας να έχουν τη μεγαλύτερη δυνατή αποτελεσματικότητα, θα πρέπει να γνωρίζουμε επαρκώς **τους νόμους της τύχης**, για να μπορούμε να αντιμετωπίζουμε τα προβλήματα της αβεβαιότητας με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

1.2. Πειράματα τύχης - Δειγματικός χώρος

Με τον όρο **πείραμα τύχης** εννοούμε γενικά κάθε πείραμα ή παρατήρηση που αναφέρεται στα τυχαία γεγονότα και το αποτέλεσμά του δεν μπορούμε να το προβλέψουμε με βεβαιότητα. Π.χ. η περιστροφή μιας ρουλέτας είναι πείραμα τύχης, γιατί σε κάθε περιστροφή θα εμφανιστεί ένας από τους παρακάτω 37 αριθμούς 0, 1, 2, 3, ..., 36, χωρίς όμως να μπορούμε να γνωρίζουμε ποιος ακριβώς θα εμφανιστεί.

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος του πειράματος.**

Τον δειγματικό χώρο το συμβολίζουμε με το κεφαλαίο γράμμα **Ω,** ενώ τα στοιχεία του δειγματικού χώρου τα συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\omega}_i$ και το πλήθος τους μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο.

Παραδείγματα δειγματικού χώρου

1. **Ρίψη ενός νομίσματος μία φορά.**
Ο δειγματικός χώρος θα είναι:

$$\Omega = \{\Pi, \Gamma\}$$

όπου **Π** = πρόσωπο και **Γ** = γράμματα.

2. **Ρίψη ενός νομίσματος δύο φορές.**
Ο δειγματικός χώρος θα είναι:

$$\Omega = \{\Pi\Pi, \Pi\Gamma, \Gamma\Pi, \Gamma\Gamma\}$$

3. **Περιστροφή μιας ρουλέτας.**
Ο δειγματικός χώρος θα είναι:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 36\}$$

4. **Ο δειγματικός χώρος που αναφέρεται στον αριθμό κλήσεων που δέχεται μια τηλεφωνική συσκευή στη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου θα είναι:**

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

5. **Ρίψη ενός ζαριού μία φορά.**
Ο δειγματικός χώρος θα είναι:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

6. **Ρίψη ενός νομίσματος τρεις φορές.**
Ο δειγματικός χώρος θα είναι:

$$\Omega = \{ΠΠΠ,\ ΠΠΓ,\ ΠΓΠ,\ ΠΓΓ,\ ΓΠΠ,\ ΓΠΓ,\ ΓΓΠ,\ ΓΓΓ\}$$

7. **Αν μια οικογένεια έχει τρία παιδιά και το πρώτο είναι αγόρι.**
Ο δειγματικός χώρος θα είναι:

$$\Omega = \{AAA,\ AAK,\ AKA,\ AKK\}$$

όπου **Α** = Αγόρι και **Κ** = Κορίτσι.

8. **Ρίψη δύο ζαριών μία φορά.**
Ο δειγματικός χώρος θα είναι:

Πίνακας 1.1

Ω =

B	A					
	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου **Ω** ονομάζεται **ενδεχόμενο** ή **γεγονός.** Π.χ. ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά. Ο δειγματικός χώρος θα είναι:

$$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Παριστάνουμε με **Α** το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί ζυγός αριθμός", με **Β** "να εμφανιστεί αριθμός μεγαλύτερος του 2" και με **Γ** "να εμφανιστεί ο αριθμός 5", οπότε έχουμε:

$$A = \{2,\ 4,\ 6\},\quad B = \{3,\ 4,\ 5, 6\},\quad \Gamma = \{5\}$$

Παρατηρούμε ότι καθένα από τα παραπάνω ενδεχόμενα **(Α, Β, Γ)** είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου **Ω.** Το ενδεχόμενο εκείνο που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο του δειγματικού χώρου ονομάζεται **στοιχειώδες ενδεχόμενο** (ή **απλό** ή **βασικό ενδεχόμενο**, όπως είναι το ενδεχόμενο $\boldsymbol{\Gamma} = \{5\}$, ενώ το ενδεχόμενο που αποτελείται από περισσότερα από ένα στοιχεία του δειγματικού χώρου ονομάζεται **σύνθετο ενδεχόμενο,** όπως είναι τα ενδεχόμενα $\boldsymbol{A} = \{2,\ 4,\ 6\}$ και $\boldsymbol{B} = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

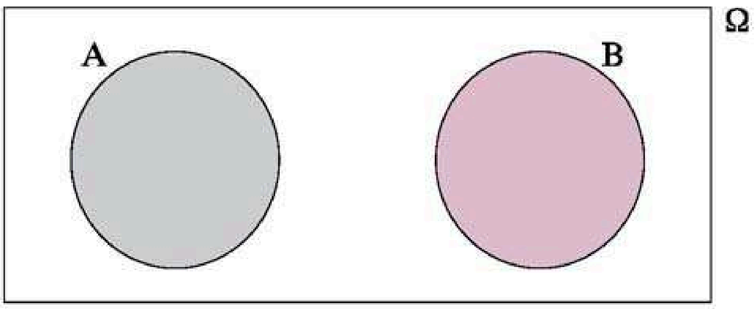
Το ενδεχόμενο που το συμβολίζουμε με το κενό σύνολο $\varnothing$ θα το ονομάζουμε **αδύνατο ενδεχόμενο**, γιατί δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος. Π.χ. στη ρίψη του ζαριού το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί αριθμός μεγαλύτερος από 6" είναι αδύνατο.

Το ενδεχόμενο **Ω** το ονομάζουμε **βέβαιο ενδεχόμενο**, γιατί αποτελείται από το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.

1.3. Πράξεις με ενδεχόμενα

1.3.1. Ενδεχόμενα ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους

Δύο ενδεχόμενα **A** και **B** του ίδιου δειγματικού χώρου **Ω** λέγονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα μεταξύ τους**, αν η πραγματοποίηση του ενός ενδεχομένου αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου (βλ. διάγραμμα 1.1).



Διάγραμμα 1.1

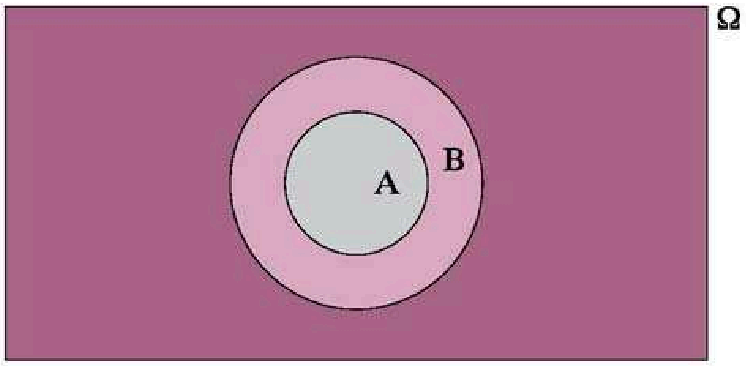
Στα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ισχύει η σχέση $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$.

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα νόμισμα. Παριστάνουμε με **A** το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί η όψη πρόσωπο" και με **B** το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί η όψη γράμματα". Τα ενδεχόμενα **A** και **B** είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, γιατί αν εμφανιστεί η όψη "πρόσωπο" αποκλείεται να εμφανιστεί η όψη "γράμματα".

1.3.2. Συνεπαγόμενα ενδεχόμενα

Αν **A** και **B** είναι δύο ενδεχόμενα ώστε $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, τότε η πραγματοποίηση του ενδεχομένου **A** συνεπάγεται την πραγματοποίηση του ενδεχομένου **B.** Στην περίπτωση αυτή τα ενδεχόμενα A και **B** ονομάζονται **συνεπαγόμενα** (βλ. διάγραμμα 1.2).



Διάγραμμα 1.2

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Παριστάνουμε με **A** το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί αριθμός μικρότερος του 4" και με **B** το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί αριθμός μικρότερος του 6", οπότε θα έχουμε:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

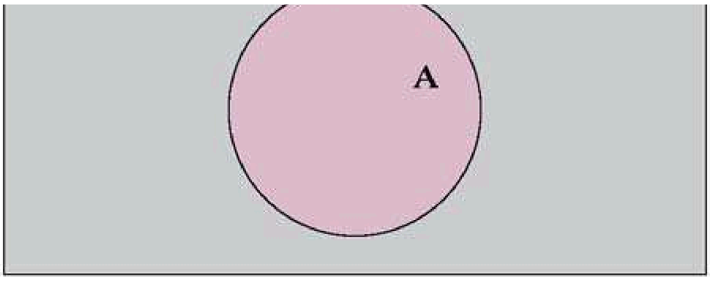
Τα ενδεχόμενα **A** και **B** είναι συνεπαγόμενα, γιατί η πραγματοποίηση του ενδεχομένου **A** συνεπάγεται την πραγματοποίηση του ενδεχομένου **B**.

1.3.3. Συμπληρωματικά ή αντίθετα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου **Ω** ονομάζονται **συμπληρωματικά** ή **αντίθετα**, αν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου και το άθροισμά τους (ένωσή τους) μας δίνει το βέβαιο ενδεχόμενο, δηλαδή το δειγματικό χώρο **Ω.** Έτσι, αν **A** είναι ένα ενδεχόμενο ενός πειράματος, τότε το συμπληρωματικό ενδεχόμενό του το συμβολίζουμε με $\mathbf{A^c}$ ή $\bar{\mathbf{A}}$ (βλ. διάγραμμα 1.3) και με βάση τα παραπάνω θα έχουμε:

$$A + \bar{A} = \Omega \quad \text{και} \quad A \cap \bar{A} = \varnothing$$

Το ενδεχόμενο $\bar{\mathbf{A}}$ λέγεται και **άρνηση** του **A**.

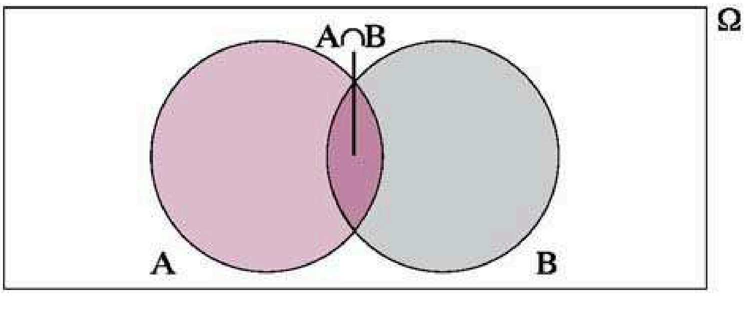


Διάγραμμα 1.3

Δύο ενδεχόμενα συμπληρωματικά είναι **αναγκαστικά** και **ασυμβίβαστα, ενώ δύο** ενδεχόμενα **ασυμβίβαστα δεν είναι πάντοτε και συμπληρωματικά μεταξύ τους.** Π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού, το ενδεχόμενο "αριθμός 2" είναι ασυμβίβαστο με το ενδεχόμενο "αριθμός 4", γιατί αν εμφανιστεί ο αριθμός 2 αποκλείεται να εμφανιστεί ο αριθμός 4. Τα δύο όμως αυτά ενδεχόμενα δεν είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους, γιατί στη ρίψη του ζαριού δε σημαίνει ότι μόνο ένας από τους δύο αριθμούς 4 και 2 μπορεί να εμφανιστεί.

1.3.4. Τομή ενδεχομένων

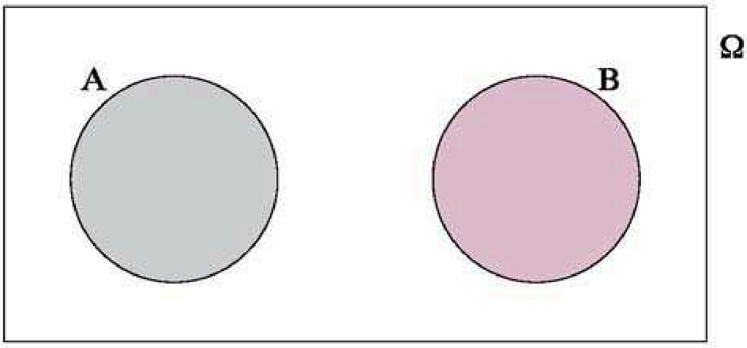
Τομή δύο ενδεχομένων **A** και **B** είναι το ενδεχόμενο εκείνο που πραγματοποιείται, αν πραγματοποιηθούν και τα δύο ενδεχόμενα **A** και **B** συγχρόνως (βλ. διάγραμμα 1.4). Δηλαδή η τομή των ενδεχομένων **A** και **B** περιλαμβάνει τα στοιχεία εκείνα του δειγματικού χώρου που ανήκουν στο ενδεχόμενο **A** και στο ενδεχόμενο **B**.



Διάγραμμα 1.4

Αν τα δύο ενδεχόμενα **A** και **B** είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, τότε η τομή μας δίνει το αδύνατο ενδεχόμενο:

$$A \cap B = \varnothing$$



Διάγραμμα 1.5

Γενικά, αν έχουμε **κ** ενδεχόμενα $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}, \ldots, \mathbf{A_\kappa}$, τότε η τομή τους είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται, αν πραγματοποιηθούν συγχρόνως όλα τα ενδεχόμενα $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}, \ldots, \mathbf{A_\kappa}$.

Η τομή σε αυτήν την περίπτωση συμβολίζεται με:

$E = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_\kappa$ ή $E = A_1 A_2 A_3 \ldots A_\kappa$

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Παριστάνουμε με **A** το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί άρτιος αριθμός" και με **B** το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 2". Να υπολογιστεί η τομή των ενδεχομένων **A** και **B**.

Θα έχουμε:

$$A = \{2, 4, 6\} \quad \text{και} \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

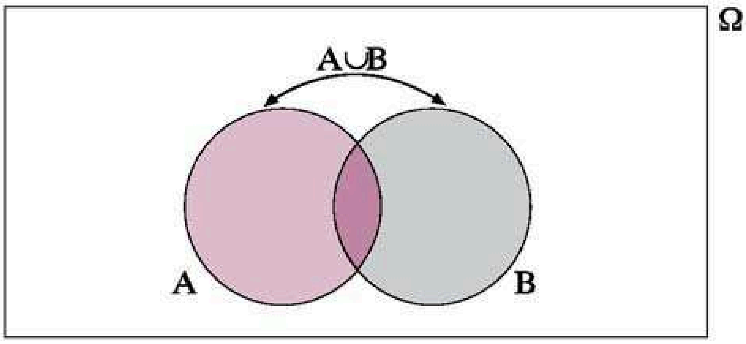
Η τομή των ενδεχομένων **A** και **B** θα αποτελείται από τα στοιχεία (ψηφία) εκείνα που ανήκουν και στο ένα και στο άλλο ενδεχόμενο, δηλαδή:

$$A \cap B = AB = \{2, 4, 6\}$$

1.3.5. Ένωση ενδεχομένων

Στην ένωση διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Η μία αναφέρεται στην περίπτωση που τα ενδεχόμενα δεν είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους και η άλλη στην περίπτωση που αυτά είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους.

Ένωση δύο μη ασυμβίβαστων ενδεχομένων **A** και **B** ονομάζεται το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί, είτε το ενδεχόμενο **A**, είτε το ενδεχόμενο **B**, είτε και τα δύο μαζί (βλ. διάγραμμα 1.6), δηλαδή να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα **A** και **B**.



Διάγραμμα 1.6

Την ένωση των μη ασυμβίβαστων ενδεχομένων τη συμβολίζουμε:

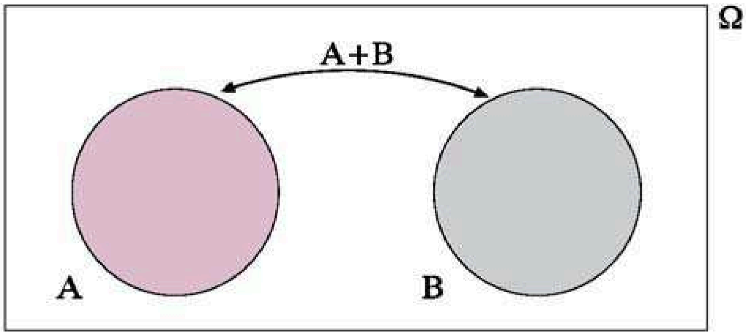
$$A \cup B$$

Γενικά, η ένωση των μη ασυμβίβαστων ενδεχομένων A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_\kappa$ συμβολίζεται με:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_\kappa \quad \text{ή} \quad E = \bigcup_{i=1}^{\kappa} A_i$$

και είναι το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_\kappa$.

Αν όμως τα δύο ενδεχόμενα **A** και **B** είναι και **ασυμβίβαστα μεταξύ τους,** τότε **ένωση** λέγεται το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί, είτε το ενδεχόμενο **A** είτε το ενδεχόμενο **B** όχι όμως και τα δύο μαζί (βλ. διάγραμμα 1.7).



Διάγραμμα 1.7

Γενικότερα, η ένωση των ασυμβίβαστων ανά δύο ενδεχομένων $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\kappa$ συμβολίζεται με:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_\kappa$$

ή συνοπτικά ως εξής:

$$E = \sum_{i=1}^{\kappa} A_i$$

Παράδειγμα 1.1

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Παριστάνουμε με **A** το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί ο αριθμός 1 ή 5 ή 6" και με **B** το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί ο αριθμός 3 ή 4 ή 5". Να υπολογιστεί η ένωση των ενδεχομένων **A** και **B.**

Λύση:

Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα $A = \{1, 5, 6\}$ και $B = \{3, 4, 5\}$ δεν είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους. Επομένως, η ένωσή τους θα είναι:\

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

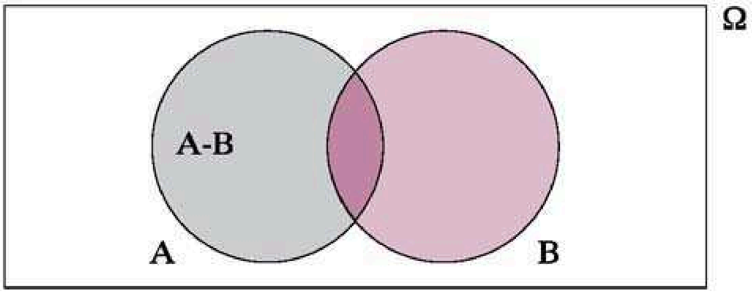
και πραγματοποιείται αν πραγματοποιηθεί το ένα τουλάχιστον από τα δύο ενδεχόμενα A και B.

1.3.6. Διαφορά ενδεχομένων

Διαφορά του ενδεχομένου **B** από το **A** λέγεται το ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται αν πραγματοποιηθεί το **A** χωρίς να πραγματοποιηθεί το **B.**

Η διαφορά των δύο ενδεχομένων **A** και **B** δίνεται από τη σχέση (βλ. διάγραμμα 1.8):

$$A - B = A \cap \bar{B}$$



Διάγραμμα 1.8

Παράδειγμα

Δίνονται τα ενδεχόμενα $\boldsymbol{A}=\{1, 2, 5, 4\}$ και $\boldsymbol{B}=\{2, 4, 7, 9\}$. Να υπολογιστεί η διαφορά $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

Το ενδεχόμενο $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ πραγματοποιείται αν και μόνο αν πραγματοποιηθεί το **Α** χωρίς να πραγματοποιηθεί το **Β.** Επομένως, η διαφορά θα είναι:

$$A-B=\{1, 5\}$$

1.4. Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Έστω ότι κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης ο δειγματικός χώρος παίρνει τις παρακάτω τιμές:

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\nu\}$$

και ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_\nu\}$ είναι ισοπίθανα, δηλαδή $\boldsymbol{P}\{\omega_i\}=\mathbf{P}$ για κάθε $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \ldots, \boldsymbol{\nu}$. Επειδή το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των στοιχειωδών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου είναι ίσο με 1, θα έχουμε σύμφωνα με την προσθετική ιδιότητα:

$$P\{\omega_1\}+P\{\omega_2\}+P\{\omega_3\}+\ldots+P\{\omega_\nu\}=1 \quad \text{ή}$$

$$\nu \cdot P=1 \Rightarrow P=\frac{1}{\nu}$$

Αν ένα ενδεχόμενο $\boldsymbol{A}=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu\}$ αποτελείται από μ στοιχεία του δειγματικού χώρου $\boldsymbol{\Omega}$, ο λόγος $\boldsymbol{\mu/\nu}$ λέγεται πιθανότητα του ενδεχομένου **Α** και την παριστάνουμε με $\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{A}\}$, δηλαδή:

$$P\{A\}=\frac{\mu}{\nu}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\textit{πλήθος στοιχείων του } A}{\textit{πλήθος στοιχείων του } \Omega}$$

Το **μ** αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ευνοϊκών περιπτώσεων του ενδεχομένου και το **ν** τον αριθμό όλων των δυνατών περιπτώσεων.

Άρα, μπορούμε να καταλήξουμε στον παρακάτω κλασικό ορισμό της πιθανότητας:

Πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο **A** είναι ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων του ενδεχομένου **A** προς το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων, με τον όρο ότι όλες οι περιπτώσεις είναι ισοπίθανες.

Δηλαδή:

$$P\{A\} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{\textit{πλήθος ευνοικών περιπτώσεων του } A}{\textit{πλήθος στοιχείων του } \Omega} \tag{1.1}$$

Η πιθανότητα $P\{A\}$ είναι αριθμός που περιέχεται μεταξύ του **0** και του **1**, δηλαδή: $0 \leq P\{A\} \leq 1$ και συγκεκριμένα θα είναι $P\{A\} = 0$, όταν η πραγματοποίηση του ενδεχομένου **A** είναι αδύνατη και $P\{A\} = 1$, όταν το ενδεχόμενο **A** είναι βέβαιο.

Βασικές προϋποθέσεις εφαρμογής του κλασικού ορισμού της πιθανότητας είναι:

α) ο δειγματικός χώρος πρέπει να έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών ενδεχομένων,

β) τα στοιχειώδη ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα και

γ) να γνωρίζουμε και τον αριθμητή και τον παρανομαστή του λόγου $\frac{\mu}{\nu}$.

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας έχει διατυπωθεί από τον Laplace το 1812.

Παράδειγμα 1.2

Μια κάλπη περιέχει 8 άσπρα, 4 κόκκινα και 5 πράσινα σφαιρίδια. Εξάγουμε κατά τυχαίο τρόπο ένα σφαιρίδιο. Ποια είναι η πιθανότητα να εξαχθεί άσπρο σφαιρίδιο;

Λύση:

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι όσες και τα άσπρα σφαιρίδια, δηλαδή 8, ενώ οι δυνατές περιπτώσεις είναι όσα είναι όλα μαζί τα σφαιρίδια, δηλαδή $8 + 4 + 5 = 17$. Αν παραστήσουμε με **A** το ενδεχόμενο να εξαχθεί άσπρο σφαιρίδιο, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας των ισοπίθανων ενδεχομένων θα έχουμε:

$$P\{A\} = \frac{\textit{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\textit{πλήθος στοιχείων του } \Omega} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{8}{17} = 0{,}47$$

1.5. Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου

Παίρνουμε ένα τυχαίο ενδεχόμενο **Α** που αναφέρεται σε ένα πείραμα τύχης **(Π)**. Αν υποθέσουμε ότι εκτελούμε το πείραμα **(Π)** **ν** φορές και ότι στις **ν** αυτές δοκιμές του πειράματος **(Π)** το ενδεχόμενο **Α** παρουσιάστηκε f_ν φορές, τότε ο αριθμός f_ν ονομάζεται **απόλυτη συχνότητα** του ενδεχομένου Α, το δε κλάσμα f_ν/ν ονομάζεται **σχετική συχνότητα** του ενδεχομένου **Α.**

Η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου περιέχεται πάντοτε μεταξύ 0 και 1, δηλαδή:

$$0 \leq \frac{f_\nu}{\nu} \leq 1$$

Αν π.χ. ρίξουμε ένα νόμισμα 100 φορές και η όψη "πρόσωπο" εμφανιστεί 53 φορές, η σχετική συχνότητα της όψης "πρόσωπο" θα είναι:

$$\frac{f_\nu}{\nu} = \frac{53}{100} = 0{,}53$$

1.6. Στατιστικός ορισμός της πιθανότητας

Στην παράγραφο 1.4. είδαμε ότι το χαρακτηριστικό γνώρισμα του κλασικού ορισμού της πιθανότητας είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ειδικές μόνο περιπτώσεις και μάλιστα σε εκείνα τα πειράματα στα οποία οι δυνατές περιπτώσεις είναι το ίδιο πιθανές και έχουν πεπερασμένο πλήθος απλών ενδεχομένων.

Σε πολλά όμως οικονομικά, κοινωνικά, δημογραφικά και άλλα φαινόμενα, είναι αδύνατο να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός αυτός, γιατί οι δυνατές περιπτώσεις δεν είναι το ίδιο πιθανές και δεν παρουσιάζουν πεπερασμένο πλήθος αποτελεσμάτων.

Τέτοιες δυσκολίες παρουσιάζονται π.χ. όταν θέλουμε να απαντήσουμε στα παρακάτω ερωτήματα:

- Ποια η πιθανότητα να παρουσιαστεί ο αριθμός 3 κατά τη ρίψη ενός ζαριού που δεν είναι κανονικό;
- Ποια η πιθανότητα μια γυναίκα να γεννήσει κορίτσι;
- Ποια η πιθανότητα να εξαχθεί άσπρο σφαιρίδιο από μια κάλπη που περιέχει άσπρα και μαύρα σφαιρίδια, αλλά δεν γνωρίζουμε πόσα είναι τα άσπρα και πόσα τα μαύρα;
- Ποια η πιθανότητα μια ηλεκτρική λάμπα να λειτουργήσει πάνω από 500 ώρες;
- Ποια η πιθανότητα τα προϊόντα που παράγονται από ένα εργοστάσιο να περιέχουν 2% ελαττωματικά αντικείμενα;
- Ποια η πιθανότητα να ζήσει ένα βρέφος περισσότερο από 10 μήνες κ.λπ.;

Η πιθανότητα στα παραπάνω αντιπροσωπευτικά παραδείγματα μπορεί να προσδιοριστεί μόνο με εμπειρικό τρόπο και όχι με τη βοήθεια του κλασικού ορισμού της πιθανότητας του Laplace.

Συγκεκριμένα, αν θέλουμε να μελετήσουμε ένα τυχαίο γεγονός **A**, πραγματοποιούμε μια σειρά από **ν** δοκιμές, πάντοτε με τις ίδιες συνθήκες. Θα παρατηρήσουμε ότι το γεγονός **A** (π.χ. εμφάνιση της όψης "πρόσωπο" σε μια σειρά δοκιμών των **ν** ρίψεων του ίδιου νομίσματος) εμφανίζεται $\mathbf{f_\nu}$ φορές, άρα η σχετική συχνότητά του θα είναι:

$$0 \le \frac{f_\nu}{\nu} \le 1$$

Αν πραγματοποιήσουμε πολλές φορές το πείραμα των **ν** δοκιμών, πάντοτε με τις ίδιες συνθήκες, η σχετική συχνότητα $\mathbf{f_\nu/\nu}$ δεν είναι πάντοτε η ίδια, αλλά η πείρα έχει αποδείξει ότι αν το **ν** είναι μικρός αριθμός, η σχετική συχνότητα $\mathbf{f_\nu/\nu}$ παρουσιάζει μεγάλες αποκλίσεις (διακυμάνσεις) στις διαδοχικές δοκιμές και ότι όσο μεγαλώνει ο αριθμός των **ν** δοκιμών, τόσο η σχετική συχνότητα $\mathbf{f_\nu/\nu}$ προσπαθεί (τείνει) να σταθεροποιηθεί γύρω από μια σταθερή τιμή **P**, την οποία μπορούμε να πάρουμε ως μέτρο πιθανότητας του γεγονότος **A**. Η παραπάνω διαπίστωση αποτελεί το λεγόμενο **εμπειρικό νόμο της σταθερότητας των σχετικών συχνοτήτων.**

Για να παρακολουθήσουμε το μηχανισμό της σύγκλισης της σχετικής συχνότητας γύρω από το σταθερό αριθμό **P**, εκτελούμε π.χ. επτά σειρές συνεχών ρίψεων ενός κανονικού νομίσματος, με πλήθος ρίψεων που αυξάνεται σε κάθε σειρά και μετρούμε κάθε φορά την εμφάνιση της όψης "γράμματα". Τα αποτελέσματα ενός τέτοιου πειράματος εμφανίζονται στον πίνακα 1.2.

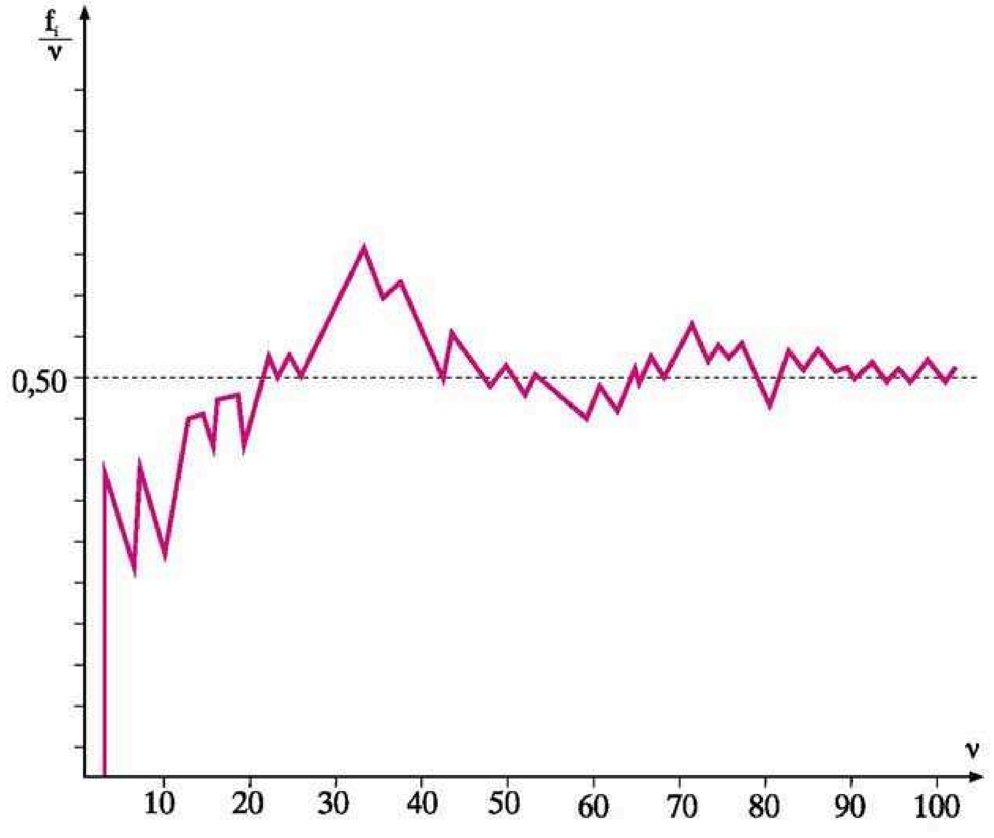
Πίνακας 1.2

Υπολογισμός σχετικών συχνοτήτων της όψης "γράμματα" σε διαδοχικές δοκιμές ενός νομίσματος

Πλήθος ρίψεων νομίσματος (ν)	Εμφάνιση γραμμάτων (f_i)	Σχετική συχνότητα ($f_{i/\nu}$)
10	3	0,30
100	44	0,44
200	106	0,53
300	147	0,49
500	252	0,504
600	298	0,498
1000	501	0,501

Από τον πίνακα αυτό παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει ο αριθμός των δοκιμών, τόσο η σχετική συχνότητα παρουσιάζει ολοένα και μικρότερες διακυμάνσεις και τείνει προς την τιμή 0,50.

Γραφικά, η πορεία της σχετικής συχνότητας, όταν ο αριθμός των δοκιμών αυξάνεται, παρουσιάζεται στο διάγραμμα 1.9.



Διάγραμμα 1.9

Από το διάγραμμα αυτό φαίνεται επίσης καθαρά ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των δοκιμών, τόσο η σχετική συχνότητα τείνει να σταθεροποιηθεί γύρω από τον αριθμό 0,50. Έτσι, καταλήγουμε στον παρακάτω εμπειρικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει διατυπωθεί από τον R. Von. Mises (1936):

Σε μια ακολουθία δοκιμών η σχετική συχνότητα f_ν/ν, όταν το ν τείνει στο άπειρο, σταθεροποιείται γύρω από μια τιμή θετική μικρότερη της μονάδας, P{A}, την οποία ονομάζουμε **στατιστική πιθανότητα** του ενδεχομένου **A** και είναι το όριο προς το οποίο συγκλίνει η σχετική συχνότητα, δηλαδή:

$$P\{A\} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{f_\nu}{\nu} \tag{1.2}$$

1.7. Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Μαθηματικός ορισμός της πιθανότητας)

Για να δώσουμε έναν τέλειο ορισμό της πιθανότητας χρησιμοποιούμε τη θεωρία των συνόλων. Με βάση τη θεωρία αυτή, μπορούμε να θεμελιώσουμε την πιθανότητα κατά τρόπο αξιωματικό με τη βοήθεια ενός συστήματος προτάσεων.

Η αξιωματική θεμελίωση της έννοιας της πιθανότητας οφείλεται στο Ρώσο Στατιστικό A.W. Kolmogorov.

Με βάση την αξιωματική θεμελίωση, η πιθανότητα ορίζεται ως μια πραγματική συνάρτηση **P**, με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του **Ω** (δηλαδή το δυναμοσύνολο **P(Ω)**, δηλαδή την οικογένεια των ενδεχομένων $\mathfrak{a}$ και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση **P** δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη.

Για να εκφράζει πιθανότητα η συνάρτηση **P** θα πρέπει να πληρεί τις παρακάτω ιδιότητες (**αξιώματα του Kolmogorov**):

1. Σε κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathfrak{a}$ ή $A \in P(\Omega)$ αντιστοιχεί ο πραγματικός αριθμός $P\{A\}$ που ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου **A**. Η πιθανότητα του ενδεχομένου **A** είναι πάντοτε $P\{A\} \geq 0$.
2. Η πιθανότητα του δειγματικού χώρου **Ω** είναι ίση με τη μονάδα, $P(\Omega) = 1$. Δηλαδή η πιθανότητα ενδεχομένου **A** περιέχεται μεταξύ του 0 και του 1, $0 \leq P\{A\} \leq 1$.
3. Αν τα ενδεχόμενα **A** και **B** είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, η πιθανότητα της ένωσης αυτών είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους πιθανοτήτων τους.