1.1. Ορισμοί – Βασικές έννοιες

Μια βασική (αρχική) έννοια στα Μαθηματικά, αυτή του *συνόλου*, δεχόμαστε ότι επιτρέπεται να θεωρηθεί ως ένα αντικείμενο αποτελούμενο από πολλά αντικείμενα διακεκριμένα και σαφώς καθορισμένα. Τα επιμέρους αντικείμενα καλούνται *στοιχεία του συνόλου*.

Με άλλα λόγια χρησιμοποιείται η λέξη "σύνολο" όταν θεωρούμε μια συλλογή αντικειμένων οποιασδήποτε φύσης σε πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος, που προέρχονται από την εμπειρία ή τη διανόηση, είναι διακεκριμένα και καλά ορισμένα και θέλουμε να τα προσδιορίσουμε ως μια οντότητα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1. *Βασικά σύμβολα*

$\wedge$	και
$\vee$	ή
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\exists!$	υπάρχει μόνο (μονοσήμαντη ύπαρξη)
$:$	τέτοιο ώστε
$:=$	ορίζεται (ή εξ ορισμού)
$\Rightarrow$	συνεπάγεται (αν ... τότε)
$\Leftrightarrow$	ισοδυναμεί (τότε και μόνο τότε)
$\underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow}$	ισοδυναμεί εξ ορισμού
$\equiv$	συμβολίζεται (ταυτίζεται)

Τα σύνολα συμβολίζονται συνήθως με κεφαλαία γράμματα, π.χ. Α, Β, Γ, Χ, Υ, κ.λπ., ενώ τα στοιχεία τους με μικρά, π.χ. α, β, γ, x, y, κ.λπ. Ένας κατ' αρχήν συμβολισμός, με βάση τον οποίο δηλώνεται ότι ένα στοιχείο περιέχεται στο σύνολο, είναι αυτός του "ανήκειν" (συμβολικά "$\in$"), που σημαίνει ότι ένα αντικείμενο x είναι στοιχείο του συνόλου X (συμβολικά $x \in X$) και διαβάζεται:

x *ανήκει στο* X. Αν ένα στοιχείο x δεν περιέχεται στο σύνολο X (συμβολικά $x \notin X$), διαβάζεται: x *δεν ανήκει στο* X. Επίσης, για να υποδειχθεί ότι τα x, y, z,... είναι στοιχεία ενός συνόλου X, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$X = \{x,\ y,\ z, \ldots\} \tag{1.1}$$

Τέλος, μια επίσης βασική σχέση είναι αυτή της *ισότητας* "=", μέσω της οποίας γίνεται διάκριση των στοιχείων ενός συνόλου μεταξύ τους.

Στη συνέχεια δεχόμαστε ότι επιτρέπεται η θεώρηση ενός συνόλου, του *κενού συνόλου* (συμβολικά $\varnothing$), το οποίο δεν έχει στοιχεία. Επιπλέον, ορίζονται κάποιες "σχέσεις" μεταξύ συνόλων, όπως:

Η σχέση του "περιέχεσθαι" $\subseteq$: Για δύο σύνολα A, B το A περιέχεται στο B (συμβολικά $A \subseteq B$) ή το A είναι υποσύνολο του B $\underset{ορσ.}{\Leftrightarrow}$ $\forall\, x \in A \Rightarrow x \in B$. (1.2)

Η σχέση του "γνησίως περιέχεσθαι" $\subset$: Για δύο σύνολα A, B το A περιέχεται γνησίως στο B (συμβολικά $A \subset B$) ή το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B $\underset{ορσ.}{\Leftrightarrow}$ $A \subseteq B$ *και* $\exists\, x \in B : x \notin A$. (1.3)

Η σχέση της "ισότητας" =: Για δύο σύνολα A, B το A ισούται με το B (συμβολικά $A = B$) $\underset{ορσ.}{\Leftrightarrow}$ $A \subseteq B$ *και* $B \subseteq A$. (1.4)

Οι σχέσεις "$\subseteq$" και "$\subset$" ικανοποιούν τις επόμενες αντίστοιχες ιδιότητες για τρία σύνολα A, B, Γ:

$A \subseteq A$ (αυτοπαθής) (1.2 α)

Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική) (1.2 β)

Αν $A \subset B$ και $B \subset \Gamma$, τότε $A \subset \Gamma$ (μεταβατική) (1.3 α)

Τέλος, το κενό σύνολο $\varnothing$ θεωρείται υποσύνολο κάθε συνόλου.

Η σχέση (1.2) του "περιέχεσθαι" ($\subseteq$) οδηγεί στην έννοια του *δυναμοσυνόλου* ενός (τυχαίου) συνόλου X (συμβολικά $\mathcal{P}(X)$), που αποτελείται απ' όλα τα υποσύνολα του X και του οποίου βασική σχέση είναι η ισότητα (πρβλ. (1.4)).

Προφανώς το $\varnothing$ και το X είναι στοιχεία του δυναμοσυνόλου X, με αποτέλεσμα το $\mathcal{P}(X)$ να είναι μη κενό σύνολο. Ένα στοιχείο $A \in \mathcal{P}(X)$ μπορεί να καθοριστεί πλήρως από μια ιδιότητα I των στοιχείων του, οπότε γράφουμε:

$$A = \{x \in X:\ x \text{ ικανοποιεί την ιδιότητα I}\} \tag{1.5}$$

Συνεπώς υπάρχουν δύο τρόποι καθορισμού ενός συνόλου: Δι' αναγραφής των στοιχείων του (πρβλ. (1.1)) ή και δια περιγραφής των στοιχείων του (πρβλ. (1.5)).

Στο σύνολο $\mathcal{P}(X)$ ορίζονται, για δύο (τυχαία) στοιχεία A, B, οι επόμενες πράξεις:

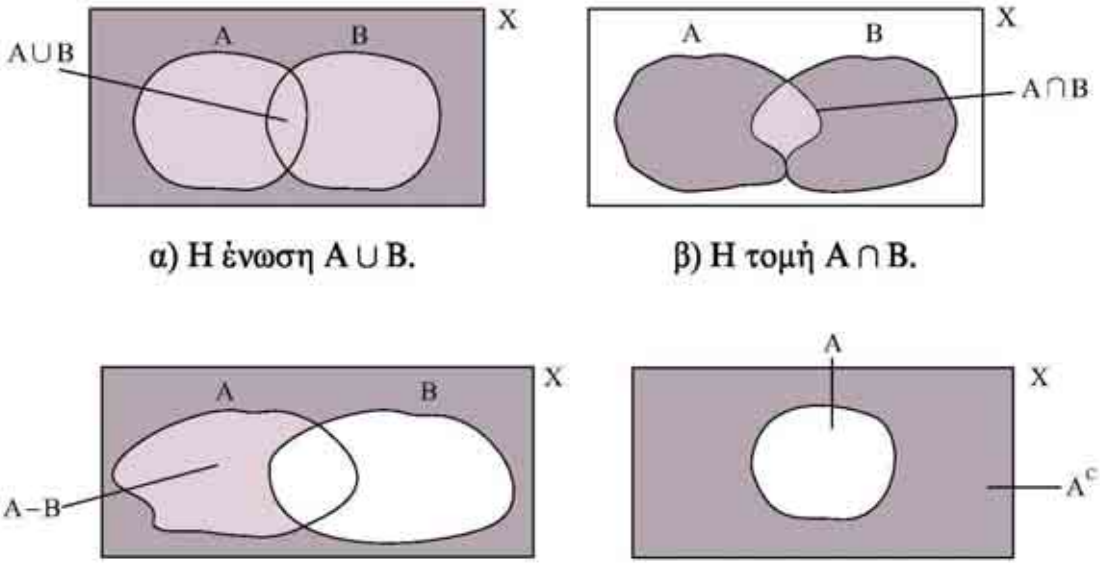
α) *Ένωση (συμβολικά "∪")*, $A \cup B := \{x \in X : x \in A \ \vee \ x \in B\}$.

β) *Τομή (συμβολικά "∩")*, $A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$.

γ) *Διαφορά (συμβολικά "−")*, $A - B := \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$.

δ) *Συμπλήρωμα (του A ως προς X, συμβολικά "^{c}")*, $A^c := X - A = \{x \in X : x \notin A\}$.

ε) *Διαζευτικό άθροισμα (συμβολικά $\dot{+}$)*, $A \dot{+} B = (A - B) \cup (B - A)$ (1.6)



α) Η ένωση A ∪ B.

β) Η τομή A ∩ B.

γ) Η διαφορά A − B.

δ) Το συμπλήρωμα A^c.

Σχήμα 1.1: *Οι πράξεις των συνόλων.*

1.2. Καρτεσιανό γινόμενο

Αν X, Y είναι δύο μη κενά σύνολα, το σύνολο

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\} \tag{1.7}$$

των διατεταγμένων ζευγών (x, y) καλείται *καρτεσιανό γινόμενο* των X και Y. Με την έννοια διατεταγμένα ζεύγη εννοούμε εκείνα για τα οποία διακρίνεται πρώτο και δεύτερο στοιχείο. Στο σύνολο (1.7) ορίζεται "ισότητα" (συμβολικά "="):

$$(x, y) = (\alpha, \beta) \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} x = \alpha, y = \beta \tag{1.8}$$

για κάθε ζεύγος (x, y), (α, β) του $X \times Y$.

Σημείωση 1.1. Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ όπως έχει εισαχθεί και μελετηθεί στο Λύκειο. Έτσι, θεωρούμε κατ' αρχήν το σύνολο $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ των *φυσικών αριθμών* και στη συνέχεια τα σύνολα $\mathbb{Z}^+ := \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$ των *θετικών ακεραίων*, $\mathbb{Z}^- := \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0\} \equiv -\mathbb{Z}^+$ των *αρνητικών ακεραίων* και $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ των *ακεραίων αριθμών*. Επιπλέον, το σύνολο $\mathbb{Z}$ επεκτείνεται στο σύνολο $\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ των *ρητών αριθμών* και στη συνέχεια στο σύνολο των *αρρήτων αριθμών*, που εξ ορισμού αποτελείται από τους μη ρητούς αριθμούς. Το υπερσύνολο όλων των προηγούμενων αριθμών ορίζει το σύνολο $\mathbb{R}$ των *πραγματικών αριθμών*. Έτσι ισχύει η σχέση

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \tag{1.9}$$

με αποτέλεσμα το σύνολο $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ να είναι το σύνολο των αρρήτων. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε με A_p το σύνολο των αρρήτων, τότε έχουμε $\mathbb{Q} \cup A_p = \mathbb{R}$ και $\mathbb{Q} \cap A_p = \varnothing$.

Επιπλέον, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ θεωρούνται γνωστά τα διαστήματα $[\alpha, \beta] := \{x \in \mathbb{R}: \alpha \leq x \leq \beta\}$, $(\alpha, \beta) := \{x \in \mathbb{R}: \alpha < x < \beta\}$ και αντίστοιχα $[\alpha, \beta) := \{x \in \mathbb{R}: \alpha \leq x < \beta\}$, $(\alpha, \beta] := \{x \in \mathbb{R}: \alpha < x \leq \beta\}$.

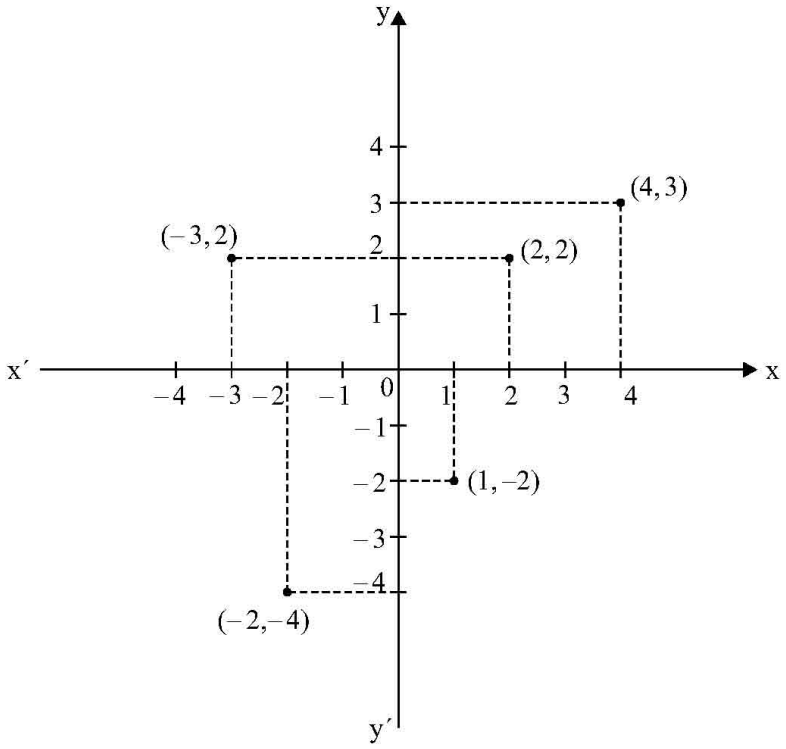
Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια πιο συστηματική μελέτη (αξιωματική θεμελίωση) των πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα 1.1.

Το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι το σύνολο

$$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} \tag{1.10}$$

τα στοιχεία του οποίου αντιστοιχούν σε σημεία M του (καρτεσιανού) επιπέδου Oxy (βλ. Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: *Καρτεσιανό επίπεδο Oxy. Το επίπεδο* $\mathbb{R}^2$.

Η έννοια του καρτεσιανού γινομένου γενικεύεται με περισσότερους από δύο παράγοντες. Έτσι, αν $X_1,\ X_2,\ \ldots, X_n$ είναι μη κενά σύνολα, καρτεσιανό γινόμενο αυτών (με τη σειρά που γράφονται πιο πάνω) είναι το σύνολο

$$\prod_{i=1}^{n} X_i \equiv X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n =$$

$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ \ldots,\ x_n \in X_n\} \tag{1.11}$$

Αν $X_1 = X_2 = \ldots = X_n \equiv X$, τότε σημειώνεται:

$$X^n := X \times X \times \ldots \times X \tag{1.12}$$

Στην περίπτωση που (τουλάχιστον) ένας από τους παράγοντες του καρτεσιανού γινομένου είναι το κενό σύνολο, τότε ως καρτεσιανό γινόμενο αυτών ορίζεται το κενό σύνολο.

Παράδειγμα 1.2.

Αν $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών και $m \in \mathbb{N}$, τότε:

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R},\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R}\} \tag{1.13}$$

1.3. Σχέσεις συνόλων

Θεωρούμε $X \times Y$ το καρτεσιανό γινόμενο δύο (μη κενών) συνόλων X, Y. Κάθε υποσύνολο Σ του $X \times Y$ καλείται *σχέση από το* X *στο* Y ή ακόμη το Σ *ορίζει* μια *σχέση από το* X *στο* Y. Αν $X = Y$, το Σ καλείται *σχέση στο* X. Το Σ μπορεί να είναι και το κενό σύνολο.

Παράδειγμα 1.3.

Αν X είναι το σύνολο των περιττών και Y των αρτίων πραγματικών αριθμών, το $\Sigma = \{(x, y) \in X \times Y : y \text{ είναι διπλάσιος του } x\}$, υποσύνολο του $X \times Y$, ορίζει μια σχέση από το X στο Y.

Παράδειγμα 1.4.

Αν $X := \{y^2,\ y \in \mathbb{R}\}$ είναι το σύνολο των τετραγώνων των πραγματικών αριθμών, το υποσύνολο $\Sigma = \{(x, y) : y \text{ είναι το τετράγωνο του } x\}$ του $\mathbb{R} \times X$ ορίζει μια σχέση από το $\mathbb{R}$ στο X.

Συμβολισμός. Για μια σχέση Σ στο X, ένα στοιχείο $(x, y) \in \Sigma$ $(\subseteq X \times X)$ γράφεται επίσης $x\Sigma y$.

Ορισμός 1.1. Μια σχέση Σ στο X καλείται *σχέση διατάξεως* (ή *διάταξη*) στο X, αν, για κάθε $x, y \in X$, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$$x\Sigma x, \text{ για κάθε } x \in X \quad (\text{αυτοπαθής}) \tag{1.14}$$

$$\text{Αν } x\Sigma y \text{ και } y\Sigma x, \text{ τότε } x = y \quad (\text{αντισυμμετρική}) \tag{1.15}$$

$$\text{Αν } x\Sigma y \text{ και } y\Sigma z, \text{ τότε } x\Sigma z \quad (\text{μεταβατική}) \tag{1.16}$$

Ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια διάταξη Σ (συμβολικά (X, Σ) ή απλά X, αν δεν υπάρχει σύγχυση) καλείται *διατεταγμένο σύνολο*. ❑

Παρατήρηση 1.1. Αν μια σχέση Σ του X ικανοποιεί τις ιδιότητες (1.14), (1.16) και την

$$\textit{Αν } x\Sigma y, \textit{ τότε και } y\Sigma x \ (\textit{συμμετρική}) \tag{1.15 α}$$

για κάθε $x, y \in X$, τότε η Σ καλείται *σχέση ισοδυναμίας* του X και τα στοιχεία $x, y \in X$ *ισοδύναμα*.

Παράδειγμα 1.5.

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών θεωρούμε τη σχέση "$\leq$" ορισμένη ως εξής:

$$x \leq y \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} y - x \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{1.17}$$

Με άλλα λόγια, η σχέση $\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ αποτελείται από τα ζεύγη των πραγματικών αριθμών (x, y), όπου ο δεύτερος όρος είναι μεγαλύτερος του πρώτου, δηλαδή η διαφορά του δεύτερου από τον πρώτο είναι θετική. Παρατηρούμε ότι η σχέση "$\leq$" ικανοποιεί τις ιδιότητες (1.14) - (1.16). Έτσι ορίζει μια διάταξη στο $\mathbb{R}$, με αποτέλεσμα το $(\mathbb{R}, \leq)$ να είναι διατεταγμένο σύνολο.

Παράδειγμα 1.6.

Στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ ενός συνόλου X η σχέση του "περιέχεσθαι" $\subseteq$ (πρβλ. (1.2)) ικανοποιεί τις ιδιότητες (1.14) - (1.16), όπως προκύπτει από τις (1.2α), (1.2β), (1.3α), με αποτέλεσμα το $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ να είναι διατεταγμένο σύνολο.

Θεωρούμε (X, Σ) διατεταγμένο σύνολο για το οποίο ισχύει επιπλέον η ιδιότητα:

$$\textit{Για κάθε } x, y \in X \Rightarrow x\Sigma y \textit{ ή } y\Sigma x \tag{1.18}$$

Τότε, η Σ καλείται *γραμμική* (ή *ολική*) διάταξη και το (X, Σ) *γραμμικά* (ή *ολικά*) διατεταγμένο σύνολο.

Παράδειγμα 1.7.

α) Το σύνολο $(\mathbb{R}, \leq)$ είναι ολικά διατεταγμένο, αφού για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών ο ένας είναι πάντοτε μικρότερος του άλλου.

β) Το σύνολο $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ δεν είναι ολικά διατεταγμένο, αφού για κάθε ζεύγος υποσυνόλων του X το ένα δεν είναι πάντοτε υποσύνολο του άλλου.

Αν (X, Σ) είναι διατεταγμένο σύνολο, ορίζεται η *δυϊκή διάταξη* Σ' $(\subseteq X \times X)$ της Σ, έτσι ώστε

$$x\Sigma' y \underset{\textit{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} y\Sigma x, \quad \textit{για κάθε } x, y \in X \tag{1.19}$$

Η Σ' ικανοποιεί τις ιδιότητες (1.14) - (1.16) και επιπλέον είναι γραμμική αν η Σ είναι γραμμική.

Παράδειγμα 1.8.

Στο $(\mathbb{R}, \leq)$ ορίζεται η δυϊκή διάταξη "$\geq$" από τη σχέση

$$x \geq y \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} y \leq x, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \tag{1.20}$$

Από το Παράδειγμα 1.7 (α) προκύπτει ότι η "$\geq$" είναι ολική διάταξη του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.2. Έστω (X, Σ) διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq X$. Το A καλείται *άνω φραγμένο* (αντιστ. *κάτω φραγμένο*) στο X αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\beta \in X$ (αντιστ. $\alpha \in X$) έτσι ώστε $x\Sigma\beta$ (αντιστ. $\alpha\Sigma x$). Το A καλείται *φραγμένο* στο X αν είναι άνω και κάτω φραγμένο στο X, δηλαδή αν υπάρχουν $\alpha, \beta \in X$ με $\alpha\Sigma x\Sigma\beta$, για κάθε $x \in A$. Σ' ένα άνω (αντιστ. κάτω) φραγμένο σύνολο A στο X, το στοιχείο β (αντιστ. α) του X καλείται *άνω* (αντιστ. *κάτω*) *φράγμα* του A. ❑

Παράδειγμα 1.9.

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι κάτω φραγμένο στο $(\mathbb{R}, \leq)$ με κάτω φράγμα τον αριθμό 1, ενώ δεν είναι άνω φραγμένο. Τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ των ακεραίων και ρητών αριθμών αντίστοιχα δεν είναι φραγμένα (άνω και κάτω) στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.10.

Το ανοικτό διάστημα $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{R}$ είναι άνω και κάτω φραγμένο (άρα φραγμένο) στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.3. Έστω A άνω φραγμένο σύνολο στο X. Καλούμε *supremum (ή άνω πέρας) του* A *στο* X (συμβολικά supA) το μικρότερο από τα άνω φράγματα του A, αν υπάρχει. Επιπλέον, αν το A είναι κάτω φραγμένο στο X, καλούμε *infimum (ή κάτω πέρας) του* A *στο* X (συμβολικά infA) το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα του A, αν υπάρχει. ❑

Παράδειγμα 1.11.

α) Το $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ είναι φραγμένο σύνολο στο $(\mathbb{R}, \leq)$ με $\sup(0, 1] = 1$ και $\inf(0, 1] = 0$. Το $\sup(0, 1] = 1$ χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες:
   i) $x \leq \sup(0, 1]$, $\forall\, x \in (0, 1]$ και
   ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in (0, 1] : x > \sup(0, 1] - \varepsilon$.

Αντίστοιχες ιδιότητες ισχύουν για το $\inf(0,1]$.

β) Για το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ισχύει $\sup \mathbb{N} = +\infty \notin \mathbb{R}$ και $\inf \mathbb{N} = 1$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ $(:= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ με $+\infty, -\infty$ τα κατ' εκδοχήν σημεία. Το $\overline{\mathbb{R}}$ θα μελετηθεί ιδιαιτέρως στο Κεφάλαιο 2.

γ) Για το σύνολο $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ ισχύει $\sup A = 1$ και $\inf A = 0$ στο $\mathbb{R}$.

δ) Για τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ ισχύει $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, $\sup \mathbb{Q} = +\infty$ και $\inf \mathbb{Q} = -\infty$ στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Για ένα $A \subseteq X$, τα $\sup A$, $\inf A$, όταν υπάρχουν (Ορισμός 1.3) δεν είναι, γενικά, στοιχεία του A. Αν $\sup A \in A$, τότε $\sup A = \max A$ (:*μέγιστο στοιχείο* του A) και αν $\inf A \in A$, τότε $\inf A = \min A$ (:*ελάχιστο στοιχείο* του A).

Παράδειγμα 1.12.

α) Για το σύνολο $(0,1]$ ισχύει $\sup(0,1] = 1 = \max(0,1]$ και $\inf(0,1] = 0 \notin (0,1]$ (Παράδειγμα 1.11 (α)).

β) Για το σύνολο $\mathbb{N}$ ισχύει $\sup \mathbb{N} = +\infty \notin \mathbb{R}$ και $\inf \mathbb{N} = 1 = \min \mathbb{N}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ (Παράδειγμα 1.11 (β)).

γ) Για το σύνολο A του Παραδείγματος 1.11 (γ) ισχύει: $\sup A = 1 = \max A$, ενώ $\inf A = 0 \notin A$.

δ) Για τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ ισχύει $\sup \mathbb{Z} = +\infty \notin \mathbb{Z}$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty \notin \mathbb{Z}$, $\sup \mathbb{Q} = +\infty \notin \mathbb{Q}$ και $\inf \mathbb{Q} = -\infty \notin \mathbb{Q}$.

1.4. Συναρτήσεις

Οι τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας βρίσκονται συνήθως σε μια εξάρτηση από τις τιμές μιας άλλης μεταβλητής. Έτσι, για παράδειγμα, ο όγκος του νερού σε μια δεξαμενή είναι συνάρτηση του χρόνου που άνοιξε ο κρουνός της δεξαμενής, η μεταβολή μιας φυσικής ποσότητας είναι συνάρτηση του χρόνου που απαιτείται γι' αυτή τη μεταβολή (π.χ. η ταχύτητα κινητού, η επιτάχυνση σωματιδίου κ.λπ.), η αντίδραση ενός οργανισμού σε ένα φάρμακο είναι συνάρτηση της ποσότητας του χορηγούμενου φαρμάκου κ.λπ.

Στα προηγούμενα παραδείγματα, αν θελήσουμε να "μαθηματικοποιήσουμε" τις εμφανιζόμενες έννοιες, συμβολίζουμε με y τις τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας, οι οποίες εξαρτώνται από τις τιμές μιας άλλης μεταβλητής

ποσότητας, έστω x. Οι δύο αυτές ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους με ένα νόμο, έστω f. Έτσι η μεταβλητή y εκφράζεται από τη x μέσω της f, με αποτέλεσμα να γράφουμε συμβολικά:

$$y = f(x) \tag{1.21}$$

Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στον Euler και επιτρέπει τη χρησιμοποίηση διαφορετικών ονομάτων για διαφορετικές σχέσεις.

Κάθε κανόνας (ή νόμος) που δείχνει τον τρόπο αντιστοίχισης κάθε στοιχείου ενός συνόλου σ' ένα καθορισμένο στοιχείο ενός άλλου συνόλου ονομάζεται *συνάρτηση*, σύμφωνα με τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.4. Θεωρούμε δύο μη κενά σύνολα X και Y. Ένας *κανόνας* (ή *νόμος*) με τον οποίο αντιστοιχίζεται σε κάθε στοιχείο του X ένα και μόνο στοιχείο του Y καλείται *συνάρτηση* από το σύνολο X στο σύνολο Y. ❑

Παρατήρηση 1.2.

α) Σε ορισμένα συγγράμματα δίνεται η έννοια της *απεικόνισης* (αντί της συνάρτησης), σύμφωνα με τον Ορισμό 1.4, ενώ ως συνάρτηση ορίζεται κάθε απεικόνιση με σύνολο Y τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$. Για την αποφυγή σύγχυσης και για ενιαία ορολογία στο παρόν βιβλίο η έννοια της συνάρτησης θα είναι σύμφωνη με τον Ορισμό 1.4.

β) Σύμφωνα με τα προηγούμενα και την παράγραφο 1.3, ένα υποσύνολο A του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$ δύο μη κενών συνόλων X, Y καλείται συνάρτηση (ή απεικόνιση), έτσι ώστε:

$$A = \{(x,\ y) \in X \times Y:\ \text{κάθε } x \in X \text{ ανήκει σε ένα ζεύγος } (x, y)\}$$

με αποτέλεσμα να γράφουμε $(x,\ y) \in A$ αντί $y = A(x)$.

Ο κανόνας (ή νόμος ή ακόμη και διαδικασία) που θα καθορίζει την αντιστοιχία των στοιχείων του συνόλου X και του Y θα συμβολίζεται με "f" και η συνάρτηση

$$f : X \to Y : x \mapsto f(x) \quad \text{ή} \quad X \xrightarrow{f} Y \text{ με } y = f(x) \tag{1.22}$$

ή απλά $y = f(x)$, αν δεν υπάρχει σύγχυση (πρβλ. (1.21)).

Το στοιχείο $x \in X$ καλείται *ανεξάρτητη μεταβλητή* και το $y(= f(x)) \in Y$ *εξαρτημένη μεταβλητή*. Το ευρύτερο από τα υποσύνολα του X για τα οποία έχει έννοια η συνάρτηση καλείται *πεδίο ορισμού* (: π.ο.) της f (έστω $A \subseteq X$) και η συνάρτηση συμβολίζεται

$$f : A \subseteq X \to Y : x \mapsto f(x) \tag{1.23}$$

Για (τυχαίο) $x \in A$ το $y = f(x) \in Y$ καλείται *εικόνα* του (στοιχείου) x. Το σύνολο όλων των εικόνων

$$f(A) := \{y \in Y : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\} \tag{1.24}$$

καλείται *εικόνα* ή *πεδίο τιμών* (:π.τ.) της (συνάρτησης) f.

Αν $f : X \to Y$ είναι μια συνάρτηση και $Z \subseteq Y$, το σύνολο

$$f^{-1}(Z) := \{x \in X : f(x) \in Z\} \subseteq X \tag{1.25}$$

καλείται *αντίστροφη εικόνα* του Z μέσω της f, έτσι ώστε

$$x \in f^{-1}(Z) \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} f(x) \in Z \tag{1.26}$$

Οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Z \to \Omega$ καλούνται *ίσες* (και γράφουμε $f = g$) τότε, και μόνο τότε, αν $X = Z$, $Y = \Omega$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$. Εξάλλου θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g *συμπίπτουν στο σύνολο* $A \subset X \cap Z$ τότε και μόνο τότε, αν $Y = \Omega$ και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Αν $f : X \to Y$ είναι μια συνάρτηση και $A \subseteq X$, η συνάρτηση

$$f|_A : A \to Y : x \mapsto (f|_A)(x) := f(x) \tag{1.27}$$

καλείται *περιορισμός της* f *στο* A. Εξάλλου, αν X, Y είναι δύο (μη κενά) σύνολα, $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$ μια συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $\tilde{f} : X \to Y$ καλείται *επέκταση της* f *από το* A *στο* X, αν $\tilde{f}|_A = f$, δηλαδή αν $\tilde{f}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ καλείται *αμφιμονοσήμαντη* ή *1-1*, αν για x_1, $x_2 \in X$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Ισοδύναμα, αν δεν υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$ με $f(x_1) = f(x_2)$ (άρνηση της προηγούμενης πρότασης). Αν η f είναι 1-1, τότε για κάθε $y \in f(X)$ $\exists!\, x \in X$ με $f(x) = y$, δηλαδή η f είναι *αντιστρέψιμη*, με τη έννοια ότι ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(X) \to X$ με $g(y) := x$, η οποία καλείται *αντίστροφη της* f (συμβολικά f^{-1}), έτσι ώστε $f^{-1}(f(x)) = x$ και $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $x \in X, y \in f(X)$.

Επιπλέον, η $f : X \to Y$ είναι *επί του* Y αν $f(X) = Y$.

Πιο συγκεκριμένα, επειδή $f(X) \subseteq Y$, για να είναι η f επί αρκεί $Y \subseteq f(X)$, που ισοδύναμα σημαίνει ότι για κάθε $y \in Y$ αρκεί να $\exists!\, x \in X$ με $y = f(x)$.

Άμεση συνέπεια των προηγουμένων είναι η

Πρόταση 1.1. Αν $f : X \to Y$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη και επί του Y συνάρτηση, τότε:

α) η f^{-1} είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του Y επί του X.

β) $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in X$ και $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $y \in Y$. ❑

Παράδειγμα 1.13.

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^3 - 1$ είναι 1-1 και επί του $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει η αντίστροφή της $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}, & x \geq -1 \\ -\sqrt[3]{-\dfrac{x+1}{2}}, & x < -1 \end{cases}$$

Σημείωση 1.2. Επειδή στις συναρτήσεις η ανεξάρτητη μεταβλητή συμβολίζεται με x και η εξαρτημένη με y, στις αντίστροφες συναρτήσεις (αντιστρέψιμων συναρτήσεων) κάνουμε αλλαγή μεταβλητών ώστε να έχουμε και εδώ ανεξάρτητη μεταβλητή x. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1$ είναι 1-1 και επί του $\mathbb{R}$, οπότε ορίζεται η $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας ο τύπος προκύπτει από τη λύση της $y = x + 1$ ως προς x. Δηλαδή $x = y - 1$, οπότε $f^{-1}(y) = y - 1$. Για να υπάρχει ενιαίος συμβολισμός κάνουμε αλλαγή μεταβλητής στην τελευταία σχέση, οπότε $f^{-1}(x) = x - 1$. (πρβλ. επίσης Παράδειγμα 1.13).

Στη συνέχεια θεωρούμε τις συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$, οπότε καλούμε *σύνθεση των* f *και* g μια συνάρτηση

$$g \circ f : X \to Z : x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad (1.28)$$

Στην προκειμένη περίπτωση συμβολικά γράφουμε $g \circ f$ και διαβάζουμε g του f (Σχήμα 1.3).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Σχήμα 1.3.

Παράδειγμα 1.14.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$. Τότε η σύνθεση g του f (δηλ. $g \circ f$) είναι μια συνάρτηση:

$$g \circ f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } (g \circ f)(x) := g(f(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Άμεση συνέπεια των προηγουμένων εννοιών είναι η

Πρόταση 1.2. Αν οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι αμφιμονοσήμαντες και επί, τότε η $g \circ f : X \to Z$ (Σχήμα 1.3) είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη και επί και ισχύει $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ❑

Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο, η συνάρτηση

$$\mathrm{id}_X : X \to X : x \mapsto \mathrm{id}_X(x) := x \tag{1.29}$$

καλείται *ταυτοτική συνάρτηση* του X. Από τον ορισμό της η id_X είναι μια αμφιμονοσήμαντη και επί (του X) συνάρτηση, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της $(\mathrm{id}_X)^{-1} : X \to X$, η οποία ισούται προφανώς με την id_X.

Έτσι, αν $f : X \to Y$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη και επί συνάρτηση και id_X, id_Y οι ταυτοτικές συναρτήσεις των X, Y αντιστοίχως, τότε ισχύει:

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \quad \text{και} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \tag{1.30}$$

(πρβλ. Προτάσεις 1.1, 1.2).

Παρατήρηση 1.3. Η έννοια μιας αμφιμονοσήμαντης και μιας επί συνάρτησης είναι διαφορετικές, αφού μια συνάρτηση μπορεί να έχει τη μία από τις δύο ιδιότητες χωρίς αυτό να συνεπάγεται ότι έχει και την άλλη. Κλασικό παράδειγμα είναι οι συναρτήσεις προβολές, οι οποίες ορίζονται ως εξής: Δοθέντος ενός (πεπερασμένου) καρτεσιανού γινομένου $\prod_{i=1}^{n} X_i \equiv X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ (πρβλ. (1.11)), ορίζονται οι συναρτήσεις

$$\mathrm{pr}_i : \prod_{\kappa=1}^{n} X_\kappa \to X_i : (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \longmapsto$$

$$\longmapsto \mathrm{pr}_i\,(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) := x_i \tag{1.31}$$

όπου τα στοιχεία $(x_\kappa)_{\kappa=1,\ldots,n} \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ του καρτεσιανού γινομένου αντιστοιχούν στην i-συντεταγμένη για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Η συνάρτηση (1.31) καλείται i-*προβολή* του $\prod_{\kappa=1}^{n} X_\kappa$. Για παράδειγμα, αν $\mathbb{R}^3 = \{x \equiv (x_1, x_2, x_3),$ $x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3\}$, τότε ορίζονται:

η πρώτη (ή 1-) προβολή $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathrm{pr}_1(x) = x_1$

η δεύτερη (ή 2-) προβολή $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathrm{pr}_2(x) = x_2$

και η τρίτη (ή 3-) προβολή $\mathrm{pr}_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathrm{pr}_3(x) = x_3$.

Όπως εύκολα μπορεί να δει κάποιος η συνάρτηση (1.31), i-προβολή, είναι επί αλλά όχι πάντοτε αμφιμονοσήμαντη.

Συμβολισμός. Θεωρούμε το άθροισμα $1+2+3+4+5+6$. Κάθε όρος του αθροίσματος είναι της μορφής κ με κ φυσικό αριθμό από 1 μέχρι 6. Το εν λόγω *άθροισμα* γράφεται με τη βοήθεια του συμβόλου $\sum$ ως

$$\sum_{\kappa=1}^{6} \kappa := 1+2+3+4+5+6$$

Με τον ίδιο τρόπο γράφουμε, για παράδειγμα,

$$\sum_{\kappa=1}^{5} \kappa^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$$

$$\sum_{\kappa=0}^{5} (-1)^{\kappa} \cdot 2\kappa = (-1)^0 \cdot 2 \cdot 0 + (-1)^1 \cdot 2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 +$$

$$+ (-1)^4 \cdot 2 \cdot 4 + (-1)^5 \cdot 2 \cdot 5 = -2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 5$$

$$\sum_{\kappa=0}^{5} (2\kappa+1) = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) +$$

$$+ (2 \cdot 4 + 1) + (2 \cdot 5 + 1) = 2(0+1+2+3+4+5) +$$

$$+ (1+1+1+1+1+1) = 2\sum_{\kappa=0}^{5} \kappa + \sum_{\kappa=0}^{5} 1 = 2\sum_{\kappa=0}^{5} \kappa + 6$$

$$\sum_{\kappa=1}^{5} \frac{1}{\kappa} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Γενικότερα, αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \tag{1.32}$$