$$P\{A\} = 1 - P\{A^c\} = 1 - \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{15}{8}}{\binom{20}{8}} = 1 - \frac{\binom{15}{8}}{\binom{20}{8}}$$

62. Μία κάλπη περιέχει 5 λευκά και 4 μαύρα σφαιρίδια. Εξάγουμε στην τύχη ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια. Να υπολογιστεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α: «Τα σφαιρίδια είναι του ίδιου χρώματος».
Β: «Τα σφαιρίδια είναι διαφορετικού χρώματος».

Λύση

Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω θα είναι όσοι και οι συνδυασμοί των 9 στοιχείων ανά 3. Επομένως:

$$N(\Omega) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

Αν E_1 είναι το ενδεχόμενο «και τα 3 σφαιρίδια είναι λευκά» και E_2 το ενδεχόμενο «και τα 3 σφαιρίδια είναι μαύρα», τότε θα έχουμε:

$$N(E_1) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

και:

$$N(E_2) = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

Επομένως, η πιθανότητα να είναι και τα 3 σφαιρίδια λευκά θα είναι:

$$P\{E_1\} = \frac{10}{84}$$

και η πιθανότητα να είναι και τα 3 σφαιρίδια μαύρα, θα είναι:

$$P\{E_2\} = \frac{4}{84}$$

Η πιθανότητα να είναι του ίδιου χρώματος, δηλαδή ή και τα 3 λευκά ή και τα 3 μαύρα, με βάση την ιδιότητα της πρόσθεσης όταν τα ενδεχόμενα να είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, θα είναι:

$$P\{A\} = P\{E_1\} + P\{E_2\} = \frac{10}{84} + \frac{4}{84} = \frac{14}{84}$$

Η πιθανότητα τα σφαιρίδια να είναι διαφορετικού χρώματος, υπολογίζεται πολύ εύκολα, αρκεί να αφαιρέσουμε από τη μονάδα την πιθανότητα να είναι του ίδιου χρώματος, γιατί τα ενδεχόμενα Α (να είναι του ίδιου χρώματος) και Β (να είναι διαφορετικού χρώματος), είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους, οπότε θα έχουμε:

$$P\{B\} = 1 - P\{A\} = 1 - \frac{14}{84} = \frac{70}{84}$$

63. Μια κάλπη περιέχει 6 λευκά και 4 μαύρα σφαιρίδια. Εξάγουμε στην τύχη 3 σφαιρίδια χωρίς επανατοποθέτηση. Να βρεθεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
Α: «Και τα 3 σφαιρίδια είναι λευκά».
Β: «Τα 2 σφαιρίδια είναι λευκά και το 1 μαύρο».
Γ: «Τουλάχιστον 1 σφαιρίδιο είναι μαύρο».

Λύση

Η πιθανότητα να είναι και τα 3 σφαιρίδια λευκά βρίσκεται ως εξής: Υπολογίζουμε πρώτα το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω, δηλαδή κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να πάρουμε 3 σφαιρίδια από τα 10 σφαιρίδια που βρίσκονται στην κάλπη. Αυτά μπορούμε να τα πάρουμε κατά τόσους τρόπους όσοι είναι και οι συνδυασμοί των 10 στοιχείων ανά 3, οπότε έχουμε:

$$N(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

Ο αριθμός 120 εκφράζει το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω, δηλαδή το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων.

Υπολογίζουμε, στη συνέχεια, το πλήθος των στοιχείων του ενδεχόμενου Α, δηλαδή τις ευνοϊκές περιπτώσεις. Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχόμενου Α δηλώνει κατά πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε 3 λευκά σφαιρίδια από τα 6 λευκά που βρίσκονται στην κάλπη. Αυτά μπορούμε να τα πάρουμε κατά τόσους τρόπους όσοι είναι οι συνδυασμοί:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20 \text{ τρόπους}$$

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα του ενδεχόμενου Α, με βάση τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας (ισοπίθανα ενδεχόμενα), θα είναι:

$$P\{A\} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{πλήθος στοιχείων του A}}{\text{πλήθος στοιχείων του } \Omega} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την πιθανότητα να πάρουμε 2 λευκά και 1 μαύρο σφαιρίδιο:

$$P\{B\} = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}$$

Για να βρούμε την πιθανότητα να πάρουμε τουλάχιστον 1 μαύρο σφαιρίδιο, σκεπτόμαστε ως εξής: Υπολογίζουμε την πιθανότητα να μην πάρουμε κανένα μαύρο σφαιρίδιο, δηλαδή να πάρουμε 3 λευκά σφαιρίδια, και αφαιρούμε από τη μονάδα. Έτσι θα πάρουμε την πιθανότητα να εξαχθεί τουλάχιστον 1 μαύρο σφαιρίδιο, δηλαδή:

$$P\{B\} = 1 - P\{A\} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

64. Η πιθανότητα να πετύχει ένας σκοπευτής κάποιο στόχο είναι $\frac{3}{5}$. Αν πυροβολεί συνεχώς μέχρι να πετύχει το στόχο μία φορά, ποια είναι η πιθανότητα να πυροβολήσει 4 φορές;

Λύση

Η πιθανότητα να μην πετύχει το στόχο κατά την πρώτη φορά είναι $\frac{2}{5}$. Το ίδιο ισχύει και για τη δεύτερη και την τρίτη φορά. Η πιθανότητα να χτυπηθεί ο στόχος κατά την τέταρτη φορά είναι $\frac{3}{5}$, οπότε θα έχουμε:

$$P\{A\} = P\{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{625}$$

65. Σε έναν εκπαιδευτικό σύλλογο που αποτελείται από 5 άνδρες και 5 γυναίκες γράφονται νέα μέλη 2 γυναίκες και 3 άνδρες. Από τα 15 μέλη

εκλέγεται 1 μέλος τυχαία. Να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
Α: «Το πρόσωπο που έχει εκλεγεί είναι άνδρας».
Β: «Το πρόσωπο που έχει εκλεγεί είναι παλαιό μέλος του συλλόγου».
Γ: «Το πρόσωπο που έχει εκλεγεί είναι άνδρας δεδομένου ότι πρόκειται για παλαιό μέλος μέλος του εκπαιδευτικού συλλόγου».

Λύση

Καταρτίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Παλαιά μέλη	**Νέα μέλη**	**Άθροισμα**
Άνδρες	5	3	8
Γυναίκες	5	2	7
Άθροισμα	10	5	15

α) Η πιθανότητα να εκλεγεί άνδρας είναι:

$$P\{A\} = \frac{8}{15}$$

β) Η πιθανότητα να εκλεγεί παλαιό μέλος είναι:

$$P\{B\} = \frac{10}{15}$$

γ) Η πιθανότητα του ενδεχόμενου Γ είναι:

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}} = \frac{\frac{5}{15}}{\frac{10}{15}} = \frac{1}{2}$$

66. Από μία κάλπη που περιέχει 5 αριθμημένα σφαιρίδια (1, 2, 3, 4, 5), εξάγουμε 3 σφαιρίδια χωρίς επανατοποθέτηση. Αν γνωρίζουμε ότι η μεγαλύτερη ένδειξη είναι 5, να υπολογιστεί η πιθανότητα η μικρότερη ένδειξη να είναι 2.

Λύση

Σχηματίζουμε τον παρακάτω δειγματικό χώρο που αποτελείται από $C_3^5 = 60$ στοιχειώδη ενδεχόμενα.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{llllllllll} 123, & 124, & 125, & 132, & 134, & 135, & 142, & 143, & 145, & 152, \\ 213, & 214, & 215, & 231, & 234, & 235, & 241, & 243, & 245, & 251, \\ 312, & 314, & 315, & 321, & 324, & 325, & 341, & 342, & 345, & 351, \\ 412, & 413, & 415, & 421, & 423, & 425, & 431, & 432, & 435, & 451, \\ 512, & 513, & 514, & 521, & 523, & 524, & 531, & 532, & 534, & 541, \\ & & & & & & & & & \\ 153, & 154, & & & & & & & & \\ 253, & 254, & & & & & & & & \\ 352, & 354, & & & & & & & & \\ 452, & 453, & & & & & & & & \\ 542, & 543 & & & & & & & & \end{array} \right\}$$

Έστω A το ενδεχόμενο «η μικρότερη ένδειξη είναι 2». Τότε:

$$A = \left\{ \begin{array}{llllllllll} 234, & 235, & 243, & 245, & 253, & 254, & 324, & 325, & 342, & 352, \\ 423, & 425, & 432, & 452, & 523, & 524, & 532, & 542 & & \end{array} \right\}$$

Έστω B το ενδεχόμενο «η μεγαλύτερη ένδειξη είναι 5». Τότε:

$$B = \left\{ \begin{array}{llllllllll} 125, & 135, & 145, & 152, & 153, & 154, & 215, & 235, & 245, & 251, \\ 253, & 254, & 315, & 325, & 345, & 351, & 352, & 354, & 415, & 425, \\ 435, & 451, & 452, & 453, & 512, & 513, & 514, & 521, & 523, & 524, \\ 531, & 532, & 534, & 541, & 542, & 543 & & & & \end{array} \right\}$$

Θα έχουμε:

$$P\{A\} = \frac{18}{60},\ P\{B\} = \frac{36}{60},\ P\{A \cap B\} = \frac{12}{60}$$

και επομένως:

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}} = \frac{\frac{12}{60}}{\frac{36}{60}} = \frac{1}{3}$$

67. Μία κάλπη περιέχει 4 σφαιρίδια. Από τα 4 αυτά σφαιρίδια 2 είναι λευκά και φέρουν τις ενδείξεις A_1 και A_2 και τα άλλα 2 είναι μαύρα και φέρουν τις ενδείξεις M_3 και M_4. Εξάγουμε 2 σφαιρίδια χωρίς επανατοποθέτηση. Ο δειγματικός χώρος που αναφέρεται στην εξαγωγή των 2 σφαιριδίων είναι:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} A_1A_2, & A_1M_3, & A_1M_4 \\ A_2A_1, & A_2M_3, & A_2M_4 \\ M_3M_4, & M_3A_1, & M_3A_2 \\ M_4M_3, & M_4A_1, & M_4A_2 \end{Bmatrix}$$

α) Ποια είναι η πιθανότητα να εξαχθεί κατά την πρώτη εξαγωγή λευκό σφαιρίδιο;

β) Ποια είναι η πιθανότητα να εξαχθεί κατά την πρώτη εξαγωγή μαύρο σφαιρίδιο;

γ) Ποια είναι η πιθανότητα εξαγωγής 1 λευκού και 1 μαύρου σφαιριδίου, χωρίς να λάβουμε υπόψη μας τη σειρά εξαγωγής τους;

δ) Αν κατά την πρώτη εξαγωγή εμφανίστηκε λευκό σφαιρίδιο, ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί μαύρο σφαιρίδιο στη δεύτερη εξαγωγή;

ε) Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί λευκό σφαιρίδιο κατά τη δεύτερη εξαγωγή, αν κατά την πρώτη εμφανίστηκε μαύρο;

Λύση

α) Η πιθανότητα του ζητούμενου ενδεχόμενου προκύπτει από την ένωση των στοιχειωδών ενδεχομένων των δύο πρώτων γραμμών του δειγματικού χώρου, δηλαδή:

$$P\{A\} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

β) Η πιθανότητα του ζητούμενου ενδεχόμενου προκύπτει από την ένωση των στοιχειωδών ενδεχομένων των δύο τελευταίων γραμμών του δειγματικού χώρου, δηλαδή:

$$P\{M\} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

γ) Η πιθανότητα εξαγωγής 1 λευκού και 1 μαύρου σφαιριδίου προκύπτει από τις δύο τελευταίες στήλες του δειγματικού χώρου, δηλαδή:

$$P\{A, M\} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

δ) Για τον υπολογισμό της πιθανότητας να εμφανιστεί μαύρο σφαιρίδιο κατά τη δεύτερη εξαγωγή, αν εμφανίστηκε λευκό σφαιρίδιο κατά την πρώτη, σχηματίζουμε τον παρακάτω δειγματικό χώρο:

$$\Omega' = \begin{Bmatrix} A_1A_2, & A_1M_3, & A_1M_4 \\ A_2A_1, & A_2M_3, & A_2M_4 \end{Bmatrix}$$

Έστω M' το ενδεχόμενο «προκύπτει μαύρο σφαιρίδιο κατά τη δεύτερη εξαγωγή» και A' το ενδεχόμενο «προκύπτει λευκό σφαιρίδιο κατά την πρώτη εξαγωγή». Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P\{M'|A'\} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και ως εξής:

$$P\{M'|A'\} = \frac{P\{M' \cap A'\}}{P\{A'\}} = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{2}{3}$$

ε) Για τον υπολογισμό της πιθανότητας να εμφανιστεί λευκό σφαιρίδιο κατά τη δεύτερη εξαγωγή, αν γνωρίζουμε ότι εμφανίστηκε μαύρο κατά την πρώτη, σχηματίζουμε τον παρακάτω δειγματικό χώρο:

$$\Omega'' = \begin{Bmatrix} M_3M_4, & M_3A_1, & M_3A_2 \\ M_4M_3, & M_4A_1, & M_4A_2 \end{Bmatrix}$$

Έστω M'' το ενδεχόμενο «προκύπτει μαύρο σφαιρίδιο κατά την πρώτη εξαγωγή» και A'' το ενδεχόμενο «προκύπτει λευκό σφαιρίδιο κατά τη δεύτερη εξαγωγή». Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P\{A''|M''\} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ή:

$$P\{A''|M''\} = \frac{P\{A'' \cap M''\}}{P\{M''\}} = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{2}{3}$$

68. Από μια τράπουλα των 52 χαρτιών εξάγουμε ένα. Αν αυτό είναι φιγούρα, ποια είναι η πιθανότητα να είναι βαλές;

Λύση

$$P\{\text{βαλές}|\text{φιγούρα}\} = \frac{P\{\text{βαλές} \cap \text{φιγούρα}\}}{P\{\text{φιγούρα}\}} = \frac{\frac{4}{52}}{\frac{12}{52}} = \frac{1}{3}$$

69. Στον παρακάτω πίνακα ταξινομούνται τα 321 μέλη μιας ένωσης ως προς δύο χαρακτηριστικά:

α) Ως προς τον αριθμό των ετών κατά τα οποία ο καθένας ανήκει στην ένωση,

β) Ως προς την απάντηση του καθενός στο ερώτημα «επιθυμείτε να εργαστείτε ώστε να βοηθήσετε στην οργάνωση ενός άλλου καταστήματος ή θέλετε αύξηση αποδοχών;».

Αν Α το γεγονός ότι το πρόσωπο απαντά «ναι» και Β το γεγονός ότι το πρόσωπο ανήκει στην ένωση λιγότερο από ένα έτος, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P\{A|B\}$.

Απάντηση στο ερώτημα	Σύνολο ετών στην ένωση				
	κάτω του 1	1-3	4-10	Άνω των 10	Άθροισμα
Ναι	27	54	137	28	246
Όχι	14	18	34	3	69
Δεν γνωρίζω	3	2	1	0	6
Άθροισμα	44	74	172	31	321

Λύση

$$P\{A\} = \frac{246}{321}, \quad P\{B\} = \frac{44}{321}, \quad P\{A \cap B\} = \frac{27}{321}$$

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}} = \frac{\frac{27}{321}}{\frac{44}{321}} = \frac{27}{44}$$