1 Βασικές θεωρητικές έννοιες και απαραίτητα στατιστικά στοιχεία για τη σύνταξη μιας αναλογιστικής μελέτης

1.1. Γενικές έννοιες

Με τη βοήθεια των αναλογιστικών μεθόδων, τα ταμεία σύνταξης υποχρεώνονται να υπολογίσουν κατά την ίδρυσή τους το ασφάλιστρο ανάλογα με το οικονομικό σύστημα που επιθυμούν να εφαρμόσουν και να εκτιμήσουν τις οικονομικές συνέπειες για το ταμείο λόγω της πραγματοποίησης των διάφορων ασφαλιστικών κινδύνων, όπως είναι ο θάνατος, το γήρας, η ανικανότητα, η χηρεία, η νοσηρότητα, η ορφάνεια κ.λπ.

Στις ομαδικές αυτές ασφαλίσεις το ασφάλιστρο καταβάλλεται συνήθως από τους ασφαλισμένους σαν ποσοστό επί του εισοδήματός τους, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ηλικία, ενώ στις ιδιωτικές ασφαλίσεις το ασφάλιστρο σχετίζεται με την ηλικία του ασφαλισμένου.

Τα περισσότερα ασφαλιστικά ταμεία λειτουργούν με βάση το σύστημα του σταθερού μέσου ασφαλίστρου ή κεφαλοποίησης, δηλαδή καθορίζεται από την αρχή μια σταθερή εισφορά των ασφαλισμένων και με βάση αυτή καθορίζεται και η αντίστοιχη παροχή. Στο σύστημα αυτό κεφαλοποίησης όλοι οι ασφαλισμένοι οποιασδήποτε ηλικίας καταβάλλουν το ίδιο ασφάλιστρο, χωρίς καμιά άλλη επιβάρυνση.

Το σύστημα αυτό παρέχει βεβαιότητα και κανονικότητα του ασφαλίστρου και επί πλέον περιέχει την έννοια της λειτουργίας του ανατοκισμού σε όφελος της αποταμίευσης των ασφαλισμένων.

Ένα άλλο οικονομικό σύστημα που χρησιμοποιείται (όπως π.χ. στο ΙΚΑ), είναι το **σύστημα κατανομής των δαπανών** ή **διανεμητικό.**

Σύμφωνα με το σύστημα αυτό, στο τέλος κάθε έτους υπολογίζονται όλες οι δαπάνες που έχουν καταβληθεί από τον ασφαλιστικό φορέα, για πραγματοποιηθέντες κινδύνους, άλλες υποχρεώσεις, έξοδα κλπ. και κατανέμονται οι δαπάνες αυτές μεταξύ των ασφαλισμένων ανάλογα με τις προσόδους τους ή τον αριθμό τους.

Κάθε ασφαλιστικό ταμείο στη χώρα μας θα πρέπει να διαθέτει αναλυτικά στατιστικά στοιχεία, που να αναφέρονται στη θνησιμότητα, ανικανότητα, νοσηρότητα, οικογενειακή κατάσταση, ηλικία κλπ. Δυστυχώς, κανένα ταμείο στη χώρα μας δεν διαθέτει τέτοια στοιχεία. Έτσι, αναγκαζόμασθε να κάνουμε χρήση ξένων στοιχείων για να στηρίξουμε μια αναλογιστική μελέτη.

Οι καλύτεροι πίνακες για ταμεία σύνταξης είναι οι ελβετικοί ΕΥΚ 1980 και 1990, οι γερμανικοί, οι Αγγλικοί, Ιταλικοί και Γαλλικοί.

Οι πίνακες αυτοί λαμβάνουν σαν μέση απόδοση των επενδύσεων μακροχρόνια επιτόκια 4%, 5%, 4,25% ή 4,5%.

Η εξέλιξη των οικονομικών υποχρεώσεων ενός φορέα κοινωνικής ασφάλισης εξαρτάται από την αντίστοιχη εξέλιξη της ομάδας των ασφαλισμένων του.

Η ομάδα αυτή μπορεί να είναι κλειστή ή ανοικτή.

Στην πρώτη περίπτωση, και μάλιστα κατά την ίδρυση ενός ταμείου, η ομάδα των ασφαλισμένων δεν αυξάνει με την είσοδο νέων μελών και λιγοστεύει με την πάροδο του χρόνου.

Στη δεύτερη περίπτωση, που η ομάδα είναι ανοικτή, στην αρχική ομάδα προσθέτονται νέα μέλη.

Αυτή αποτελεί τη συνηθισμένη μορφή των διάφορων φορέων κοινωνικής ασφάλισης. Το βασικό, επομένως, στοιχείο που επηρεάζει τη σύνθεση της ομάδας είναι η είσοδος νέων μελών και η έξοδος των παλαιών μελών.

Κύριος σκοπός των ασφαλιστικών ταμείων, που αναφέρεται σε κάθε καταστατικό, είναι η παροχή σύνταξης στους ασφαλισμένους λόγω γήρατος, αναπηρίας, θανάτου, χηρείας, ορφάνειας, οι παροχές περίθαλψης, κ.λπ.

Λόγω γήρατος ο ασφαλισμένος λαμβάνει σύνταξη όταν συμπληρώσει ορισμένη ηλικία και εφόσον έχει στην ασφάλιση ορισμένη υπηρεσία για να μπορεί να θεμελιώσει δικαίωμα σύνταξης.

Λόγω αναπηρίας ο ασφαλισμένος λαμβάνει σύνταξη ανεξάρτητα από το όριο ηλικίας και εφόσον κριθεί ανίκανος από την Πρωτοβάθμια Υγειονομική Επιτροπή και έχει ορισμένο αριθμό ετών υπηρεσία ή ορισμένο αριθμό ενσήμων.

Επίσης, λόγω θανάτου του ασφαλισμένου λαμβάνουν σύνταξη η χήρα και τα τέκνα του μέχρι το 18ο έτος της ηλικίας τους ή εάν σπουδάζουν, μέχρι το 24ο έτος.

Οι πόροι του ταμείου προέρχονται από διάφορα έσοδα και από τις εισφορές των ασφαλισμένων και των εργοδοτών.

Για τη σύνταξη μιας αναλογιστικής μελέτης, τα απαραίτητα στατιστικά στοιχεία που μας χρειάζονται είναι:

- Αριθμός μητρώου του ασφαλισμένου στο ταμείο.
- Έτος γέννησης ασφαλισμένου.
- Ημερομηνία πρόσληψης.
- Προϋπηρεσία σε έτη και μήνες.
- Ηλικία την ημερομηνία σύνταξης της μελέτης ή στις 31/12 του έτους σύνταξης της μελέτης.
- Συνολική υπηρεσία τόσο στο φορέα όσο και σε άλλους φορείς.
- Μέλλουσα υπηρεσία στο φορέα μέχρι την ημερομηνία σύνταξης.
- Ποσοστό εισφοράς ασφαλισμένων και εργοδοτών.
- Μέσος μηνιαίος μισθός.
- Μέση ετήσια αύξηση μισθών.
- Μέση μηνιαία σύνταξη.
- Αριθμός ασφαλισμένων (εν ενεργεία) κατά ηλικία και κατά φύλο.
- Περιουσιακά στοιχεία του φορέα.
- Έξοδα Διοίκησης.
- Μέση απόδοση επενδύσεων.
- Μέσος αριθμός νεοεισερχομένων τα τελευταία 5 έτη στην ασφάλιση.
- Μέση ηλικία εισόδου των νεοεισερχομένων.
- Αριθμός ασφαλισμένων σε βαριά επαγγέλματα.
- Στοιχεία σχετικά με τους ισολογισμούς του ταμείου των τελευταίων 6 τουλάχιστο ετών, αν υπάρχουν.
- Στοιχεία σχετικά με τον εκάστοτε ασφαλιστικό νόμο.
- Αριθμός εισερχομένων στη σύνταξη τα επόμενα τουλάχιστο 10 έτη.
- Κατηγορία συνταξιούχων.
- Αριθμός μητρώου συνταξιούχων.
- Κατανομή της ηλικίας των συνταξιούχων κατά ηλικία και φύλο.
- Έτος γέννησης συνταξιούχων.

- Μέση σύνταξη.
- Μέση ετήσια αύξηση συνταξιούχων.

Με βάση τους αναλογιστικούς υπολογισμούς, που αναφέρονται στα παραπάνω σταστιστικά στοιχεία, υπολογίζουμε τις παρούσες αξίες όλων των μεγεθών που αποτελούν το ενεργητικό και το παθητικό του ταμείου, δηλαδή υπολογίζουμε τα παρακάτω μεγέθη:

- Παρούσα αξία εισφορών των ασφαλισμένων κατά την ίδρυση του ταμείου σύνταξης.
- Παρούσα αξία εισφορών νεοεισερχομένων.
- Παρούσα αξία περιουσιακών στοιχείων.
- Παρούσα αξία συντάξεων των ήδη συνταξιούχων.
- Παρούσα αξία συντάξεων ασφαλισμένων αρχικής γενεάς.
- Παρούσα αξία σύνταξης ασφαλισμένων μελλοντικής γενεάς.
- Παρούσα αξία δαπανών διοίκησης.

Η παρούσα αξία παροχών νεοεισερχομένων υπολογίζεται **για 50 έτη.**

Η διαφορά μεταξύ ενεργητικού και παθητικού, δηλαδή το πλεόνασμα, μας δίνει το αποθεματικό.

Σχετικά με την έννοια της παρούσας αξίας ή προεξόφλησης παρατηρούμε τα εξής:

Προεξόφληση καλούμε την αναγωγή μιας μελλοντικά εισπρακτέας ή πληρωτέας αξίας σε σημερινή αξία.

Η αναγωγή μελλοντικής χρηματιστικής αξίας σε τρέχουσα ή παρούσα αξία λέγεται και **αναλογιστική αποτίμηση της αξίας** και γίνεται με τη βοήθεια του τεχνικού επιτοκίου. Δηλαδή το τεχνικό επιτόκιο χρησιμοποιείται από τον αναλογιστή για την προεξόφληση, τον προσδιορισμό δηλαδή της παρούσας αξίας, τόσο των μελλοντικών απαιτήσεων του ασφαλιστικού φορέα, δηλαδή των μελλοντικά εισπρακτέων ασφαλίστρων, όσο και των μελλοντικών υποχρεώσεων του φορέα, δηλαδή των μελλοντικά καταβλητέων παροχών (αποζημιώσεων).

Πρέπει, επίσης, εδώ να τονίσουμε ότι, βασική αρχή για τον υπολογισμό του καθαρού ασφαλίστρου είναι:

Η παρούσα αξία όλων των ασφαλίστρων και εσόδων να είναι ίση με την παρούσα αξία όλων των παροχών που θα καταβληθούν από τον ασφαλιστικό φορέα.

1.2. Συμβολισμοί και έννοιες που χρησιμοποιούνται στους ασφαλιστικούς πίνακες για σύνταξη μιας αναλογιστικής μελέτης

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέρουμε ότι για τη σύνταξη μιας αναλογιστικής μελέτης ενός ταμείου χρησιμοποιούμε διάφορους ασφαλιστικούς πίνακες που προέρχονται από το εξωτερικό και οι οποίοι ανανεώνονται κατά τακτά χρονικά διαστήματα. Εμείς για την σύνταξη των αναλογιστικών μελετών θα χρησιμοποιήσουμε βασικά τους Ελβετικούς πίνακες ΕΥΚ του 1980 και 1990 και σε ειδικές περιπτώσεις τους Γαλλικούς. Στους Ελβετικούς πίνακες παρατηρούμε τον παρακάτω συμβολισμό στις διάφορες στήλες που περιέχει και αποδίδω τη σημασία που περιέχει κάθε συμβολισμός, ώστε ο φοιτητής και κάθε ενδιαφερόμενος να διευκολυνθεί στην αναλογιστική τεχνική.

1. $\tau^n = (1+i)^n$ **:** τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας ανατοκιζόμενης επί **n** έτη με επιτόκιο **i**.

2. V^n ή $U^n = (1+i)^{-n} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$**:** παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας καταβαλόμενης μετά **n** έτη, ή παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας προεξοφλούμενης με ανατοκισμό **n** χρονικές περιόδους πριν της λήξης της.

3. $\ddot{S}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n-1}{i} \cdot (1+i)$ **:** τελική αξία ράντας, μοναδιαίας, προκαταβλητέας. Η τελική αξία προκαταβλητέας ράντας είναι η τελική αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας $(S_{\overline{n}|})$ η οποία ανατοκίζεται για μια ακόμη περίοδο $(1+i)$, δηλαδή $S_{\overline{n}|} \cdot (1+i) = \frac{(1+i)^n-1}{i} \cdot (1+i)$.

4. $\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-U^n}{1-U}$ **:** παρούσα αξία ράντας πρόσκαιρης, μοναδιαίας, αμέσου, προκαταβλητέας.

5. $\overset{(12)}{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} - \frac{11}{24}(1-U^n)$ **:** παρούσα αξία ράντας πρόσκαιρης, κλασματικής όρου 1/12, αμέσου προκαταβλητέας, καταβαλόμενης ανά 1/12 της περιόδου.

Ο Γενικός τύπος παρούσας αξίας ράντας πρόσκαιρης (όρων $n \cdot m$) κλασματικής όρου $\frac{1}{m}$, αμέσου προκαταβλητέας, καταβαλόμενης ανά $\frac{1}{m}$, της περιόδου είναι:

$$\overset{(m)}{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1-U^n)$$

6. q_x **:** παριστάνει την πιθανότητα ο x ετών ικανός να πεθάνει κατά τη διάρκεια του **x** έως **x + 1** έτους, χωρίς να παύσει να είναι ικανός.

7. $\mathbf{i_x}$ **:** είναι η πιθανότητα ο x ετών ικανός να γίνει ανίκανος κατά τη διάρκεια του **x** μέχρι **x + 1** έτους.

8. $\mathbf{q_x^i}$ **:** παριστάνει την πιθανότητα ο **x** ετών ανίκανος να πεθάνει κατά τη διάρκεια τους **x** έως **x + 1** έτους ως ανίκανος.

9. $\mathbf{q_x}$ **:** παριστάνει την πιθανότητα θνησιμότητας του συνόλου ικανών και ανίκανων στην ηλικία **x**, δηλαδή:

$$q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x}$$

10. $\boldsymbol{\ell_x^a}$ **:** Αριθμός ζώντων ικανών ανδρών ηλικίας **x**, ισχύει η σχέση:

$$\ell_x^a = \ell_{x-1}^a(1 - q_{x-1}^a - i_{x-1})$$

11. $\mathbf{I_x}$ **:** αριθμός ανίκανων στην ηλικία **x** που έγιναν από τους 100.000 ικανούς της ηλικίας 20 ετών, έχουμε τη σχέση:

$$I_x = I_{x-1} - I_{x-1} \cdot q_{x-1}^i + \ell_{x-1}^a \cdot i_{x-1} - \frac{\ell_{x-1}^a}{2} \cdot i_{x-1} \cdot q_{x-1}^i$$

= (ανάπηροι στην ηλικία **x − 1**)− (ανάπηροι που πέθαναν στην ηλικία **x − 1**)+ (ικανοί που έγιναν ανάπηροι στην ηλικία **x − 1**)−(ικανοί που έγιναν ανάπηροι στην ηλικία **x − 1** και πέθαναν).

12. $\boldsymbol{\ell_x}$ **:** Αριθμός ζώντων ανδρών ηλικίας **x**.

Ισχύει ότι:

$$\ell_x = \ell_x^a + I_x = \ell_{x-1}(1 - q_{x-1}) = \ell_{x-1} \cdot P_{x-1}$$

13. $\boldsymbol{\ell_x^i}$ **:** Παριστάνει τον αριθμό ζώντων ανίκανων ανδρών ηλικίας x, ισχύει ότι:

$$\ell_x^i = \ell_{x-1}^i(1 - q_{x-1}^i)$$

14. $\mathbf{W_x^a}$ **:** Παριστάνει την πιθανότητα να είναι παντρεμένος ένας ικανός άνδρας ηλικίας **x**.

15. $\mathbf{W_x^i}$ **:** Παριστάνει την πιθανότητα να είναι παντρεμένος ανίκανος άνδρας ηλικίας **x**.

16. $\mathbf{W_x}$ **:** Ενοποιημένες οι στήλες 14, 15 από το 65° έτος της ηλικίας και μετά.

17. $\mathbf{y_x}$ **:** Παριστάνει τη μέση ηλικία της γυναίκας, άνδρα ηλικίας **x**.

18. $\boldsymbol{\kappa_x}$ **:** Παριστάνει το μέσο αριθμό παιδιών ενός άνδρα ηλικίας **x**.

19. $\mathbf{z_x}$ **:** Παριστάνει τη μέση ηλικία παιδιών ενός άνδρα ηλικίας **x**.

20. $\mathbf{q_y^w}$ **:** Παριστάνει την πιθανότητα θνησιμότητας χήρας στην ηλικία **y** αυτής.

21. $\mathbf{h_y^w}$ **:** Παριστάνει την πιθανότητα n **y** ετών χήρα να ξαναπαντρευτεί κατά τη διάρκεια του **y** έως **y + 1** έτους.

22. $\boldsymbol{\ell_y^w}$ **:** Παριστάνει τον αριθμό χηρών ηλικίας **y** που ζουν κατά το έτος **y** της ηλικίας τους σαν χήρες.

Ισχύει η σχέση:

$$\ell_y^w = \ell_{y-1}^w(1 - q_{y-1}^w - h_{y-1}^w)$$

π.χ.

$$\ell_{40}^w = \ell_{39}^w - \ell_{39}^w \cdot q_{39}^w - \ell_{39}^w \cdot h_{39}^w =$$

(αριθμός χηρών στην ηλικία 39 ετών) – (αριθμός χηρών που πέθαναν στην ηλικία 39 ετών) – (αριθμός χηρών που ξαναπαντρεύτηκαν στην ηλικία 39 ετών).

23. $\mathbf{D_x^a = \ell_x^a \cdot U^{x-20}}$, **x – 20** επειδή οι πίνακες αρχίζουν από την ηλικία των 20 ετών. Ο αριθμός των ζώντων κατά την ηλικία **x** προεξοφλούμενος για **x – 20** έτη, **x** = σημερινή ηλικία.

24. $\mathbf{N^a_{x:\overline{65-x}|} = D^a_x + D^a_{x+1} + \ldots + D^a_{64}}$

25. $\mathbf{a^a_{x:\overline{65-x}|} = \frac{N^a_{x:\overline{65-x}|}}{D^a_x}}$ **:** Παριστάνει ράντα ζωής πρόσκαιρη, μέχρι την ηλικία των 65 ετών, άμεση, ετήσια, προκαταβλητέα ικανού.

26. $\mathbf{\overset{(12)}{N}{}^a_{x:\overline{65-x}|} = N^a_{x:\overline{65-x}|} - \frac{11}{24}(D_x - D_{65})}$

27. $\mathbf{\overset{(12)}{a}{}^a_{x:\overline{65-x}|} = \frac{\overset{(12)}{N}{}^a_{x:\overline{65-x}|}}{D^a_x}}$, παριστάνει ράντα ζωής πρόσκαιρη (μέχρι την ηλικία των 65 ετών) κλασματική καταβαλλόμενη μηνιαία και ανά ποσά 1/12.

Ο γενικός τύπος της παρούσας αξίας ράντας κλασματικής πρόσκαιρης **n · m** όρων, άμεσης, προκαταβλητέας καταβαλλόμενης ανά ποσά **1/m**, με βάση της αντίστοιχης ακεραίας ράντας θα είναι:

$$\overset{(m)}{a}_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

28. $\mathbf{\overset{(12)}{a}{}^a_{x:\overline{S-x}|} = \overset{(12)}{N}{}^a_{x:\overline{65-x}|} - \overset{(12)}{N}{}^a_{S:\overline{65-S}|}}$, **όπου S ≤ 65 :** Παριστάνει ράντα ζωής άμεση, πρόσκαιρη μέχρι την ηλικία **S**, μηνιαία, προκαταβλητέα ικανού.

Για ακεραία ράντα θα έχουμε:

$$\mathbf{a}^{a}_{x:\overline{S-x}|} = \mathbf{a}^{a}_{x:\overline{65-x}|} - \mathbf{a}^{a}_{S:\overline{65-S}|} = \mathbf{a}^{a}_{x:\overline{65-x}|} - \ (s-x/\mathbf{a}^{a}_{s} - \ 65-x/\mathbf{a}^{a}_{65}) =$$

$$= \frac{N^{a}_{x:\overline{65-x}|}}{D^{a}_{x}} - \left(\frac{N^{a}_{S} - N^{a}_{65}}{D^{a}_{x}}\right) = \frac{N^{a}_{x:\overline{65-x}|}}{D^{a}_{x}} - \frac{N^{a}_{S:\overline{65-S}|}}{D^{a}_{x}} = \frac{N^{a}_{x:\overline{65-x}|} - N^{a}_{S:\overline{65-S}|}}{D^{a}_{x}}$$

Με ανάλογο τρόπο για τη μηνιαία ράντα θα έχουμε:

$$\overset{(12)}{\mathbf{a}}{}^{a}_{x:\overline{S-x}|} = \frac{\overset{(12)}{N}{}^{a}_{x:\overline{65-x}|} - \overset{(12)}{N}{}^{a}_{S:\overline{65-S}|}}{D^{a}_{x}}$$

29. $\mathbf{C^a_x = \ell^a_x \cdot q^a_x \cdot U^{\lambda+\frac{1}{2}}}$, όπου $\boldsymbol{\lambda = x - 20}$ και 1/2 στο μέσο της ηλικίας, ο αριθμός 20 σημαίνει επειδή ο πίνακας ΕΥΚ αρχίζει από την ηλικία 20.

$\mathbf{\ell^a_x \cdot q^a_x = d^a_x}$ **:** Παριστάνει τον αριθμό ικανών ανδρών που πέθαναν μεταξύ ηλικίας **x** και **x + 1**.

30. $\bar{M}^{a}_{x:\overline{65-x}|} = \bar{C}^{a}_{x} + \bar{C}^{a}_{x+1} + \ldots + \bar{C}^{a}_{64}$

31. $\mathbf{C^{ai}_x = \ell^a_x \cdot i_x \cdot U^{\lambda+\frac{1}{2}}}$, $\boldsymbol{\lambda = x - 20}$, και $\mathbf{\ell^a_x \cdot i_x}$ = αριθμός ικανών ανδρών που έγιναν ανίκανοι μεταξύ ηλικίας **x** και **x + 1**.

32. $\bar{M}^{ai}_{x:\overline{65-x}|} = \bar{C}^{ai}_{x} + \bar{C}^{ai}_{x+1} + \ldots + \bar{C}^{ai}_{64}$

33. $\mathbf{D^i_x = \ell^i_x \cdot U^{\lambda}}$, όπου $\boldsymbol{\lambda = x - 20}$

34. $N^{i}_{x} = D^{i}_{x} + D^{i}_{x+1} + \ldots + D^{i}_{64} + N_{65}$

35. $\mathbf{\ddot{a}^i_x = \frac{N^i_x}{D^i_x}}$ **:** Παριστάνει ράντα ζωής άμεση, ετήσια, προκαταβλητέα, ανίκανου ατόμου ηλικίας **x**.

Επειδή από την ηλικία των 65 ετών και μετά δεν κάνουμε διάκριση του πληθυσμού σε ικανούς και ανίκανους, η ράντα

$$\ddot{\mathbf{a}}^{i}_{x} = \frac{D^{i}_{x} + D^{i}_{x+1} + D^{i}_{x+2} + \ldots + D^{i}_{64} + N_{65}}{D^{i}_{x}} = \frac{N^{i}_{x}}{D^{i}_{x}}$$

μετατρέπεται σε ράντα αδιάκριτης ικανότητας του πληθυσμού και ισχύει $\mathbf{N_{65} = \ell_{65}U^{65} + \ell_{66}U^{66} + \ldots}$

36. $\overset{(12)}{N}{}^{i}_{x} = N^{i}_{x} - \frac{11}{24}D^{i}_{x}$

37. $\overset{(12)}{\mathbf{a}}{}^{i}_{x} = \overset{(12)}{\mathbf{\frac{N_x}{D^i_x}}}$ **:** Παριστάνει ράντα ζωής άμεση, μηνιαία, προκατα-

βλητέα ανίκανου ατόμου ηλικίας **x**.

38. $N^i_{x:\overline{65-x}|} = D^i_x + D^i_{x+1} + D^i_{x+2} + \ldots + D^i_{64}$

39. $\ddot{\mathbf{a}}^i_{x:\overline{65-x}|} = \frac{N^i_{x:\overline{65-x}|}}{D^i_x}$: Παριστάνει ράντα ζωής άμεση, πρόσκαιρη μέχρι την ηλικία των 65 ετών, ετήσια, προκαταβλητέα ανίκανου ατόμου ηλικίας **x**.

Απόδειξη

$$\ell^i_x \cdot \ddot{\mathbf{a}}^i_{x:\overline{65-x}|} = \ell^i_x + \ell^i_{x+1}U + \ell^i_{x+2}U^2 + \ldots + \ell_{64}U^{64-x} \Rightarrow \ell^i_x\, U^x\, \ddot{\mathbf{a}}^i_{x:\overline{65-x}|} =$$

$$= \ell^i_x U^x + \ell^i_{x+1}U^{x+1} + \ell^i_{x+2}U^{x+2} + \ldots + \ell_{64}U^{64}$$

$$\ddot{\mathbf{a}}^i_{x:\overline{65-x}|} = \frac{\ell^i_x U^x + \ell^i_{x+1}U^{x+1} + \ell^i_{x+2}U^{x+2} + \ldots + \ell_{64}U^{64}}{\ell^i_x U^x} =$$

$$= \frac{D^i_x + D^i_{x+1} + \ldots + D_{64}}{D^i_x} = \frac{N^i_{x:\overline{65-x}|}}{D^i_x}$$

40. $\overset{(12)}{N}{}^i_{x:\overline{65-x}|} = N^i_{x:\overline{65-x}|} - \frac{11}{24}(D^i_x - D_{65})$

41. $\overset{(12)}{\mathbf{a}}{}^i_{x:\overline{65-x}|} = \frac{\overset{(12)}{N}{}^i_{x:\overline{65-x}|}}{D^i_x}$: Παριστάνει ράντα ζωής άμεση πρόσκαιρη, μέχρι την ηλικία των 65 ετών, μηνιαία, προκαταβλητέα ανίκανου ατόμου ηλικίας **x**.

Ισχύει δε η σχέση:

$$\overset{(12)}{\mathbf{a}}{}^i_{x:\overline{65-x}|} = \mathbf{a}^i_{x:\overline{65-x}|} - \frac{11}{24}\left(1 - \frac{D_{65}}{D_x}\right)$$

Επίσης ισχύσει ότι:

$$\mathbf{a}^i_x = \mathbf{a}^i_{x:\overline{65-x}|} + 65 - x/\mathbf{a}^i_x,$$

όπου

$$65 - x/\mathbf{a}^i_x = \frac{N^{65}}{D^i_x}$$

42. $D_x = \ell_x U^{x-20}$

43. $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots$

44. $\ddot{\mathbf{a}}_x = \frac{N_x}{D_x}$ **:** Παριστάνει παρούσα αξία ράντας άμεσης, ετήσιας, προκαταβλητέας ατόμου ικανού ή ανίκανου ηλικίας **x**.

Απόδειξη

$$\ell_x \ddot{\mathbf{a}}_x = \ell_x + \ell_{x+1}U + \ell_{x+2}U^2 + \ldots \Rightarrow \ell_x U^x \ddot{\mathbf{a}}_x =$$

$$= \ell_x U^x + \ell_{x+1}U^{x+1} + \ell_{x+2}U^{x+2} + \ldots \Rightarrow \ddot{\mathbf{a}}_x = \frac{\ell_x U^x + \ell_{x+1}U^{x+1} + \ldots}{\ell_x U^x} =$$

$$= \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

45. $\overset{(12)}{N}_x = N_x - \frac{11}{24}D_x$

46. $\overset{(12)}{\mathbf{a}}_x = \frac{\overset{(12)}{N}_x}{D_x}$: Παριστάνει ράντα άμεση, μηνιαία, προκαταβλητέα ατόμου ικανού ή ανίκανου ηλικίας **x**.

Ισχύει η σχέση:

$$\overset{(12)}{\mathbf{a}}_x = \mathbf{a}_x - \frac{11}{24}$$

52. $D^w_y = \ell^w_y U^{y-20}$, όπου **y** παριστάνει χήρα γυναίκα ηλικίας **y**.

53. $N^w_y = D^w_y + D^w_{y+1} + D^w_{y+2} + \ldots$

54. $\mathbf{a}^w_y = \frac{N^w_y}{D^w_y}$: Παριστάνει παρούσα αξία ράντας άμεσης, ετήσιας, προκαταβλητέας χήρας ηλικίας **y**.

Απόδειξη

$$\ell^w_y \cdot \mathbf{a}^w_y = \ell^w_y + \ell^w_{y+1}U + \ell^w_{y+2}U + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell^w_y U^y \mathbf{a}^w_y = \ell^w_y U^y + \ell^w_{y+1} \cdot U^{y+1} + \ell^w_{y+2}U^{y+2} + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}^w_y = \frac{\ell^w_y U^y + \ell^w_{y+1}U^{y+1}}{\ell^w_y \cdot U^y} = \frac{D^w_y + D^w_{y+1} + D^w_{y+2+\ldots}}{D^w_y} = \frac{N^w_y}{D^w_y}$$

55. $\overset{(12)}{N}{}^w_y = N^w_y - \frac{11}{24}D^w_y$

56. $\overset{(12)}{\mathbf{a}}{}^w_y = \frac{\overset{(12)}{N}{}^w_y}{D^w_y}$ **:** Παριστάνει παρούσα αξία ράντας άμεσης, μηνιαίας, προκαταβλητέας χήρας ηλικίας **y** και ισχύει:

$$\overset{(12)}{\mathbf{a}}{}_y^w = \mathbf{a}_y^w - \frac{11}{24}$$

Μπορούμε εδώ να παρατηρήσουμε ότι ο γενικός τύπος της παρούσας αξίας ράντας κλασματικής, άμεσης, προκαταβλητέας καταβαλλόμενης ανά 1/m της ακεραίας περιόδου και ανά ποσού 1/m της αντίστοιχης ακεραίας ράντας είναι:

$$\overset{(m)}{\mathbf{a}}{}_y^w = \mathbf{a}_y^w - \left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

57. $\mathbf{C_y^{wh}} = \boldsymbol{\ell}_y^w \cdot \mathbf{h_y^w} \cdot \mathbf{U^{y-20+\frac{1}{2}}}$, όπου $\boldsymbol{\ell}^w \cdot \mathbf{h_y^w}$ **:** Παριστάνει τον αριθμό χήρων που ξαναπαντρεύτηκαν στην ηλικία **y**.

58. $\bar{M}_y^{wh} = \bar{C}_y^{wh} + \bar{C}_{y+1}^{wh} + \bar{C}_{y+2}^{wh} + \ldots$

59. $\bar{A}_y^{wh} = \frac{\mathbf{M_y^{wh}}}{\mathbf{D_y^w}}$ **:** Παριστάνει την παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας που δίνεται σαν εφάπαξ αποζημίωση σε χήρα στην περίπτωση που θα ξαναπαντρευτεί.

Απόδειξη

$$\boldsymbol{\ell}_y^w \cdot \bar{A}_y^{wh} = \boldsymbol{\ell}_y^w h_y^w + \boldsymbol{\ell}_{y+1}^w \cdot h_{y+1}^w \cdot U + \boldsymbol{\ell}_{y+2}^w \cdot h_{y+2}^w \cdot U^2 + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\ell}_y^w \cdot U^y \bar{A}_y^{wh} = \boldsymbol{\ell}_y^w h_y^w \cdot U^y + \boldsymbol{\ell}_{y+1}^w \cdot h_{y+1}^w \cdot U^{y+1} + \boldsymbol{\ell}_{y+2}^w \cdot h_{y+2}^w \cdot U^{y+2} + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{A}_y^{wh} = \frac{\boldsymbol{\ell}_y^w h_y^w U^y + \boldsymbol{\ell}_{y+1}^w \cdot h_{y+1}^w \cdot U^{y+1} + \ldots}{\boldsymbol{\ell}_y^w U^y} = \frac{\bar{C}_y^{wh} + \bar{C}_{y+1}^{wh} + \bar{C}_{y+2}^{wh}}{\bar{C}_y^{wh}} = \frac{\bar{M}^{wh}}{\bar{C}_y^{wh}}$$

60. $\overset{(12)}{N}{}_y^{w+3wh} = \overset{(12)}{N}{}_y^w + 3\bar{M}_y^{wh}$

61. $\overset{(12)}{\ddot{a}}{}_y^{w+3wh} = \frac{\overset{(12)}{\mathbf{N}}{}_y^{\mathbf{w+3wh}}}{\mathbf{D_y^w}}$ **:** παρούσα αξία ράντας άμεσης, μηνιαίας, προκαταβλητέας, που παριστάνει τη σύνταξη χήρας **y** ετών και στην οποία ράντα έχει συνυπολογισθεί εφάπαξ αποζημίωση ίση με την παρούσα αξία 3 νομισματικών μονάδων στην περίπτωση που ξαναπαντρευτεί.

Απόδειξη

Αν πρόκειται για ετήσια ράντα θα έχουμε:

$$\ell_y^w \cdot \mathbf{a}_y^{w+3wh} = \ell_y^w + \ell_{y+1}^w \cdot U + \ell_{y+2}^w \cdot U^2 + \ldots + \ell_y^w \cdot h_y^w \cdot 3 + \ell_{y+1}^w \cdot h_{y+1}^w \cdot 3 + \ldots$$

$$\ell_y^w U^y \cdot \mathbf{a}_y^{w+3wh} = \ell_y^w \cdot U^y + \ell_{y+1}^w \cdot U^{y+1} + \ldots + 3(\ell_y^w \cdot h_y^w U^y + \ell_{y+1}^w \cdot h_{y+1}^w \cdot U^{y+1} + \ldots) =$$

$$= D_y^{wh} + D_{y+1}^{wh} + \ldots + 3(C_y^{wh} + C_{y+1}^{wh} + \ldots) \Rightarrow \mathbf{a}_y^{w+3wh} = \frac{N_y^w + 3\bar{M}_y^{wh}}{D_y^w} = \frac{N_y^{w+3wh}}{D_y^w}$$

63. $65 - x/\mathbf{a}_x^a = \frac{D_{65}^a}{D_x^a} \cdot \overset{(12)}{\mathbf{a}}_{65}$: Παριστάνει την παρούσα αξία ράντας μηνιαίας, μέλλουσας (αρχίζει από το 65ο έτος), προκαταβλητέα, ατόμου που φθάνει στην ηλικία των 65 ετών σαν ικανό.

Απόδειξη

$$\ell_x^a \cdot \; 65 - x/\mathbf{a}_x^a = \ell_{65}^a \cdot U^{65-x} + \ell_{65}^a \cdot P_{66} U^{66-x} + (\ell_{65}^a \cdot P_{66}) P_{67} U^{67-x} + \ldots =$$

$$= \ell_{65}^a U^{65-x} + \ell_{65}^a \cdot \frac{\ell_{66}}{\ell_{65}} \cdot U^{66-x} + \ell_{65}^a \cdot \frac{\ell_{66}}{\ell_{65}} \cdot \frac{\ell_{67}}{\ell_{66}} \cdot U^{67-2} + \ldots =$$

$$= \frac{\ell_{65}^a}{\ell_{65}} (\ell_{65} U^{65-x} + \ell_{66} U^{66-x} + \ell_{67} U^{67-x} + \ldots) \Rightarrow \; 65 - x/\mathbf{a}_x^a =$$

$$= \frac{\ell_{65}^a}{\ell_{65} \cdot \ell_x^a \cdot U^x} (\ell_{65} U^{65} + \ell_{66} U^{66} + \ell_{67} U^{67} + \ldots) =$$

$$= \frac{\ell_{65}^a \cdot U^{65}}{\ell_x^a U^x} \cdot \left(\frac{\ell_{65} U^{65} + \ell_{66} U^{66} + \ldots}{\ell_{65} \cdot U^{65}} \right) = \frac{D_{65}^a}{D_x^a} \cdot \mathbf{a}_{65}.$$

64. $D_x^{ai} = \ell_x^a \cdot i_x \cdot \overset{(12)}{\mathbf{a}}_{x+\frac{1}{2}} \cdot U^{x-20+\frac{1}{2}}$

65. $N_x^{ai} = D_x^{ai} + D_{x+1}^{ai} + \ldots + D_{64}^{ai}$

66. $S_x^{ai} = N_x^{ai} + N_{x+1}^{ai} + \ldots + N_{64}^{ai}$

67. $\mathbf{a}_x^{ai} = \frac{N_x^{ai}}{D_x^a}$ **:** Παριστάνει παρούσα αξία ράντας άμεσης, μηνιαίας, προκαταβλητέας ατόμου ικανού στην περίπτωση που καταστεί ανίκανο.

Απόδειξη

Για ετήσια ράντα θα έχουμε:

$$\ell^a_x \mathbf{a}^{ai}_x = \ell^a_x \cdot i_x \cdot \mathbf{a}_{x+\frac{1}{2}} \cdot U^{\frac{1}{2}} + \ell^a_{x+1} \cdot i_{x+1} \cdot \mathbf{a}_{x+1+\frac{1}{2}} \cdot U^{1+\frac{1}{2}} + \ldots$$

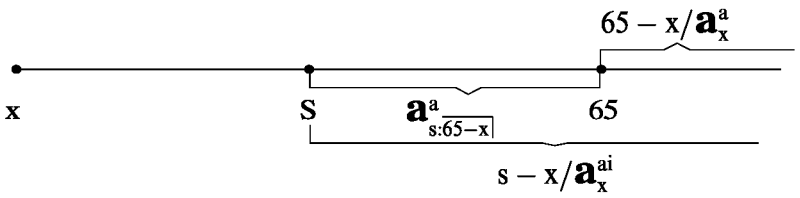
$$\ldots + \ell^a_{64} \cdot i_{64} \cdot \mathbf{a}_{64+\frac{1}{2}} \cdot U^{64-\mu-\frac{1}{2}} \Rightarrow \ell^a U^x \mathbf{a}^{ai}_x =$$

$$= \ell^a_x \cdot i_x \cdot \mathbf{a}_{x+\frac{1}{2}} \cdot U^{x+\frac{1}{2}} + \ell^a_{x+1} \cdot i_{x+1} \cdot U^{x+1+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{a}_{x+1+\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$\ldots + \ell^a_{64} \cdot i_{64} \cdot U^{64+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{a}_{64+\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbf{a}^{ai}_x = \frac{D^{ai}_x + D^{ai}_{x+1} + \ldots + D^{ai}_{64}}{D^a_x} = \frac{N^{ai}_x}{D^a_x}$$

68. $S - x/\mathbf{a}^a_x = \frac{\overset{(12)}{N}_{S:\overline{65-S}|} + N^{ai}_S + D^a_{65} + \overset{(12)}{\mathbf{a}}_{65}}{D^a_x}$ **:** Παριστάνει την παρούσα αξία ράντας, μηνιαίας, μέλλουσας (αρχίζει από το **s** έτος), προκαταβλητέας, ατόμου που φτάνει στην ηλικία **s** σαν ικανό.

Απόδειξη



$$s - x/\mathbf{a}^a_x = 65 - x/\mathbf{a}^a_x + \overset{(12)}{\mathbf{a}}{}^a_{s:\overline{65-x}|} + s - x/\mathbf{a}^{ai}_x =$$

(ράντα ατόμου που φτάνει την ηλικία 65 σαν ικανό) + (ράντα ατόμου, από την ηλικία **s** μέχρι 65, που φτάνει την ηλικία **s** σαν ικανό) + (ράντα ατόμου, ισόβια, που γίνεται ανίκανο μετά την ηλικία **s**) =

$$\frac{D^a_{65} \cdot \overset{(12)}{\ddot{a}}_{65}}{D^a_x} + \frac{\overset{(12)}{N}{}^a_{S:\overline{65-S}|}}{D^a_x} + \frac{N^{ai}_S}{D^a_x} = \frac{D^a_{65} \cdot \overset{(12)}{\mathbf{a}}_{65} + \overset{(12)}{N}{}^a_{S:\overline{65-S}|} + N^{ai}_s}{D^a_x}$$

69. $65 - x/\mathbf{a}_x = 65 - x/\mathbf{a}^a_x + \mathbf{a}^{ai}_x - \mathbf{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}|}$: Παριστάνει παρούσα αξία ράντας, μηνιαίας, μέλλουσας (αρχίζει από το 65ο έτος), προκαταβλητέας, ενός ατόμου που φτάνει στην ηλικία των 65 ετών είτε σαν

ικανό είτε ως ανίκανο.

70. $D^{ai}_{x:\overline{65-x}|} = \ell^{a}_{x} \cdot i_x \cdot \overset{(12)}{\ddot{a}}{}^{i}_{(x+\frac{1}{2}):\overline{65-x+\frac{1}{2}}|} \cdot U^{x-20+\frac{1}{2}}$

71. $N^{ai}_{x:\overline{65-x}|} = D^{ai}_{x:\overline{65-x}|} + D^{ai}_{x+1:\overline{65-(x+1)}|} + \ldots + D^{ai}_{64:\overline{1}|}$

72. $S^{ai}_{x:\overline{65-x}|} = N^{ai}_{x:\overline{65-x}|} + N^{ai}_{x+1:\overline{65-(x+1)}|} + \ldots + N^{ai}_{64:\overline{1}|}$

73. $\mathbf{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}|} = \frac{N^{ai}_{x:\overline{65-x}|}}{D^{a}_{x}}$

Απόδειξη

$$\ell^{a}_{x} \text{ot} \mathbf{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}|} = \ell^{a}_{x} \cdot i_x \cdot \overset{(12)i}{\ddot{a}}_{x+\frac{1}{2}:\overline{65-(x+\frac{1}{2})}|} \cdot U^{\frac{1}{2}} + \ell^{a}_{x+1} \cdot i_{x+1} \cdot \overset{(12)i}{\ddot{a}}_{x+1+\frac{1}{2}:\overline{65-(x+1+\frac{1}{2})}|} \cdot U^{1+\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$\ldots + \ell^{a}_{64} \cdot i_{64} \cdot \overset{(12)i}{\ddot{a}}_{64+\frac{1}{2}:\overline{65-(64+\frac{1}{2})}|} \cdot U^{64-(x-\frac{1}{2})} \Rightarrow \ell^{a}_{x} U^{x} a^{ai}_{x:\overline{65-x}|} =$$

$$= \ell^{a}_{x} \cdot i_x \cdot \overset{(12)i}{\ddot{a}}_{x+\frac{1}{2}:\overline{65-(x+\frac{1}{2})}|} \cdot U^{x+\frac{1}{2}} + \ell^{a}_{x+1} \cdot i_{x+1} \cdot \overset{(12)i}{\ddot{a}}_{x+1+\frac{1}{2}:\overline{65-(x+1+\frac{1}{2})}|} \cdot U^{x+1+\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$\ldots + \ell^{a}_{64} \cdot i_{64} \cdot \overset{(12)}{\ddot{a}}{}^{i}_{64+\frac{1}{2}:\overline{65-(64+\frac{1}{2})}|} \cdot U^{64+\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbf{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}|} =$$

$$\frac{= \ell^{a}_{x} \cdot i_x \cdot \overset{(12)}{\ddot{a}}{}^{i}_{x+\frac{1}{2}:\overline{65-(x+\frac{1}{2})}|} U^{x+\frac{1}{2}} + \ldots + \ell^{a}_{64} \cdot i_{64} \cdot \overset{(12)i}{\ddot{a}}_{64+1+\frac{1}{2}:\overline{65-(64+\frac{1}{2})}|} \cdot U^{64+\frac{1}{2}}}{\ell^{a}_{x} U^{x}} =$$

$$\frac{= D^{ai}_{x:\overline{65-x}|} + D^{ai}_{x+1:\overline{65-(x+1)}|} + \ldots + D^{ai}_{64:\overline{11}|}}{\frac{D^{a}_{x} = N^{ai}_{x:\overline{65-x}|}}{D^{a}_{x}}}$$

74. $D^{az}_{x} = \ell^{a}_{x} \cdot i_x K_x \overset{(12)i}{\ddot{a}}_{x+\frac{1}{2}:\overline{20-Z_x+\frac{1}{2}}|}$

όπου:

$\ell^{a}_{x} \cdot i_x K_x$ **:** Παριστάνει τον αριθμό ικανών που έγιναν ανίκανοι στην ηλικία **x** και οι οποίοι έχουν K_x παιδιά (K_x, είναι ο πιθανός αριθμός παιδιών ατόμου ηλικίας **x**).

$\overset{(12)}{\ddot{a}}{}^{i}_{x+\frac{1}{2}:\overline{20-Z_x+\frac{1}{2}}|}$ **:** Παριστάνει παρούσα αξία ράντας άμεσης, πρόσκαιρης (διαρκεί από την ηλικία Z_x μέχρι της ηλικίας των 20 ετών), προ-

καταβλητέας, μηνιαίας ατόμου ανίκανου ηλικίας **x**.

75. $N_x^{az} = D_x^{az} + D_{x+1}^{az} + \ldots + D_{64}^{az} + D_{65}^{a} \cdot K_{65} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_{65:\overline{3}|}$

76. $\mathbf{a}_x^{az} = \frac{N_x^{az}}{D_x^{a}}$: Παριστάνει παρούσα αξία ράντας άμεσης, πρόσκαιρης, μηνιαίας, προκαταβλητέας.

Απόδειξη

$$\ell_x^a \mathbf{a}_x^{az} = \ell_x^a \cdot i_x \cdot K_x \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{i}_{x+\frac{1}{2}:\overline{20-Z_x+\frac{1}{2}}|} \cdot U^{\frac{1}{2}} + \ell_{x+1}^a \cdot i_{x+1} \cdot K_{x+1} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{i}_{x+1+\frac{1}{2}:\overline{20-Z_x+1+\frac{1}{2}}|} \cdot U^{1+\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$\ldots + \ell_{64}^a i_{64} \cdot K_{64} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{i}_{64+\frac{1}{2}:\overline{20-Z_{64}+\frac{1}{2}}|} \cdot U^{64-(x-\frac{1}{2})} + \ell_{65}^a \cdot K_{65} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{i}_{65:\overline{3}|} U^{65-(1-\frac{1}{2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell_x^a \mathbf{a}_x^{az} U^x = \ell_x^a \cdot i_x \cdot K_x \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_{x+\frac{1}{2}:\overline{20-Z_x+\frac{1}{2}}|} U^{x+\frac{1}{2}} + \ell_{x+1}^a \cdot i_{x+1} \cdot K_{x+1} \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_{x+1+\frac{1}{2}:\overline{20-Z_{x+1}+\frac{1}{2}}|} \cdot$$

$$\cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_{x+\frac{1}{2}:\overline{20-Z_{64}+\frac{1}{2}}|} \cdot U^{64+\frac{1}{2}} + \ell_{65}^a \cdot K_{65} \cdot U^{x+1+\frac{1}{2}} + \ldots + \ell_{64}^a \cdot i_{64} \cdot K_{64} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_{65:\overline{3}|} \cdot U^{65} \Rightarrow \mathbf{a}_x^{az} =$$

$$= \frac{\ell_x^a \cdot i_x K_x \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_{x+\frac{1}{2}:\overline{20-Z_x+\frac{1}{2}}|} + \ldots + \ell_{64}^a \cdot i_{64} \cdot K_{64} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_{x+\frac{1}{2}:\overline{20-Z_{64}+\frac{1}{2}}|} + \ell_{65}^a \cdot K_{65} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_{65:\overline{3}|} \cdot U^{65}}{\ell_x^a U^x} =$$

$$= D_x^{az} + D_{x+1}^{az} + \ldots + D_{64}^{az} + D_{65}^{a} \cdot K_{65} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_{65:\overline{3}|} = \frac{N_x^{az}}{D_x^{a}}$$

Στην παραπάνω ράντα $\mathbf{a}_x^{az}$ ο τελευταίος όρος αφορά τους ασφαλισμένους ικανούς ηλικίας 65 ετών, στους οποίους χορηγείται συμπληρωματική σύνταξη, επειδή δε $z_{65} = 17{,}5$, η ράντα αυτή θα διαρκεί για $20 - 17{,}5 = 2{,}5 \simeq 3$ έτη.

77. $D_x^{aw} = U^{x-20+\frac{1}{2}} \cdot \ell_x^a (q_x^a \cdot W_{x+\frac{1}{2}}^a \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{w+3}_{y_{x+\frac{1}{2}}} + i_x \mathbf{a}_{x+y}^{iw})$

78. $N_x^{aw} = D_x^{aw} + D_{x+1}^{aw} + \ldots + D_{64}^{aw} + D_{65}^{a} \mathbf{a}_{65}^{w}$

79. $S_x^{aw} = N_x^{aw} + N_{x+1}^{aw} + \ldots + N_{64}^{aw} + D_{65}^{a} \cdot \mathbf{a}_{65}^{w}$

80. $\mathbf{a}_x^{aw} = \frac{N_x^{aw}}{D_x^{a}}$ **:** Παρούσα αξία ράντας άμεσης μηνιαίας προκαταβλητέας ατόμου ανίκανου ηλικίας **x**. Η ράντα αυτή προστίθεται σε ράντα γήρατος για παροχές χηρείας.

81. $D_x^{iw} = \ell_x^i \cdot q_x^i \cdot W_{x+\frac{1}{2}}^i \cdot \overset{(12)}{\mathbf{a}}_{y_{i+\frac{1}{2}}}^{w+3wh} \cdot U^{x+\frac{1}{2}}$

82. $N_x^{iw} = D_x^{iw} + D_{x+1}^{iw} + \ldots + D_{64}^{iw} + D_{65}^i \mathbf{a}_x^w$

83. $\mathbf{a}_x^{iw} = \frac{N_x^{iw}}{D_x^i}$ **:** Παρούσα αξία ράντας άμεσης, μηνιαίας, προκαταβλητέας ατόμου ανίκανου ηλικίας **x**. Η ράντα αυτή προστίθεται στη ράντα σύνταξης ανικανότητας και παροχή χηρείας.

84. $D_x^w = \ell_x \cdot q_x \cdot W_{x+\frac{1}{2}} \cdot \overset{(12)}{\mathbf{a}}_{y+\frac{1}{2}}^w \cdot U^{x+\frac{1}{2}}, \quad x \geq 65$

85. $N_x^w = D_x^w + D_{x+1}^w + D_{x+2}^w + \ldots$

86. $\mathbf{a}_x^{aw} = \frac{N_x^{aw}}{D_x^a}$ ή $\mathbf{a}_x^w = \frac{N_x^w}{D_x}$

87. $D_x^{a\kappa} \equiv \ell_x^a \cdot U^{x-20+\frac{1}{2}} \cdot (q_x^a \cdot K_{x+\frac{1}{2}} \cdot \overset{(12)}{\mathbf{a}}_{\overline{20-Z_x+\frac{1}{2}}|} + i_x \mathbf{a}_x^{i\kappa})$

88. $N_x^{a\kappa} \equiv D_x^{a\kappa} + D_{x+1}^{a\kappa} + \ldots + D_{64}^{a\kappa} + D_{65}^a \cdot \mathbf{a}_{65}^\kappa$

89. $S_x^{a\kappa} \equiv N_x^{ax} + N_{x+1}^{a\kappa} + \ldots + N_{64}^{a\kappa} + D_{65}^a \cdot \mathbf{a}_{65}^\kappa$

90. $\mathbf{a}_x^{a\kappa} = \frac{N_x^{a\kappa}}{D_x^a}$ **:** Παρούσα αξία ράντας άμεσης, μηνιαίας, προκαταβλητέας ατόμου ικανού ηλικίας **x**. Η ράντα αυτή προστίθεται σε ράντα γήρατος για παροχές ορφάνειας.

91. $D_x^{i\kappa} \equiv \ell_x^i q_x^i \cdot K_{x+\frac{1}{2}} \cdot \overset{(12)}{\mathbf{a}}_{\overline{20-Z_x+\frac{1}{2}}|} \cdot U^{x-20+\frac{1}{2}}$

92. $N_x^{i\kappa} \equiv D_x^{i\kappa} + D_{x+1}^{i\kappa} + \ldots + D_{64}^{i\kappa} + D_{65} \cdot \mathbf{a}_{65}^\kappa$

93. $\mathbf{a}_x^{i\kappa} = \frac{N_x^{i\kappa}}{D_x^i}$ **:** Παρούσα αξία ράντας άμεσης, μηνιαίας, προκαταβλητέας ατόμου ανίκανου ηλικίας **x**. Η ράντα αυτή προστίθεται στη ράντα σύνταξης ανικανότητας για παροχές ορφάνειας.

94. $D_x^\kappa \equiv \ell_x q_x \cdot K_{x+\frac{1}{2}} \cdot \overset{(12)}{\mathbf{a}}_{\overline{20-Z_x+\frac{1}{2}}|} \cdot U^{x-20+\frac{1}{2}}$

95. $N_x^\kappa \equiv D_x^\kappa + D_{x+1}^\kappa + \ldots + \ldots$

96. $\mathbf{a}_x^\kappa = \frac{N_x^\kappa}{D_x}, \quad x \geq 65$

97. $\mathbf{q}_y^a$ **:** Είναι η πιθανότητα η **y** ετών ικανή να πεθάνει χωρίς να παύσει να είναι ικανή κατά τη διάρκεια του **y** μέχρι **y + 1** έτους.

98. $\mathbf{i}_y$ **:** Είναι η πιθανότητα η **y** ετών ικανή να γίνει ανίκανη κατά τη διάρκεια του **y** έως **y + 1** έτους.

99. $\mathbf{q}_y^i$ **:** Είναι η πιθανότητα η **y** ετών ανίκανη να πεθάνει κατά τη διάρκεια του **y** έως **y + 1** έτους.

100. $\mathbf{q}_y$ **:** Είναι η πιθανότητα θνησιμότητας συνόλου ικανών και **y** ανικάνων στην ηλικία **y**.

Ισχύει: $\mathbf{q_y} = \frac{\ell_y - \ell_{y+1}}{\ell_y}$. Παρατήρηση, από την ηλικία των 60 ετών και μετά, δίνεται η ίδια πιθανότητα θνησιμότητας $\mathbf{q_y}$ του συνόλου των γυναικών για όλες τις ομάδες.

101. ℓ^a_y **:** Αριθμός ικανών γυναικών ηλικίας **y**.
Ισχύει:

$$\ell^a_y = \ell^a_{y-1}(1 - q^a_{y-1} - i_{y-1})$$

102. $\mathbf{I_y}$ **:** Αριθμός ανίκανων γυναικών στην ηλικία **y** που έγιναν από τις 100.000 ικανές της ηλικίας 20 ετών.Ισχύει:

$$I_y = I_{y-1} - I_{y-1} \cdot q^i_{y-1} + \ell^a_{y-1} \cdot i_{y-1} - \frac{\ell^a_{y-1}}{2} \cdot i_{y-1} \cdot q^i_{y-1}$$

103. ℓ_y : Αριθμός γυναικών ηλικίας y.
Ισχύουν:

$$\ell_y = \ell^a_y + I_y$$
$$\ell_y = \ell_{y-1}(1 - q_{y-1})$$

104. ℓ^i_y : Αριθμός ανίκανων γυναικών ηλικίας y.
Ισχύει:

$$\ell^i_y = \ell^i_{y-1}(1 - q^i_{y-1})$$

Παρατήρηση: Ο αριθμός $\ell^i_y = 208716$ είναι αυτός που χρειάζεται ώστε, πολλαπλασιάζοντας με τις πιθανότητες επιβίωσης $\mathbf{P^i_{20}}$, $\mathbf{P^i_{21}}$, ..., να καταλήξουμε στο $\ell^i_{60} = \mathbf{94959}$, δεδομένου ότι από την ηλικία 60 και πάνω η στήλη είναι κοινή για τις δύο κατηγορίες ικανών και ανικάνων.

105. $D^a_y = \ell^a_y U^{y-20}$

106. $N^a_{y:\overline{60-y|}} = D^a_y + D^a_{y+1} + \ldots + D^a_{59}$

107. $\ddot{a}^a_{y:\overline{60-y|}} = \frac{N^a_{y:\overline{60-y|}}}{D^a_y}$: Παρούσα αξία ράντας άμεσης, πρόσκαιρης, μέχρι της ηλικίας των 60 ετών, προκαταβλητέας.

108. $\overset{(12)}{N}{}^a_{y:\overline{60-y|}}$: όπως η περίπτωση 106, αλλά για δωδεκάμηνη ράντα.

109. $\overset{(12)}{\ddot{a}}{}^a_{y:\overline{60-y|}}$: όπως η περίπτωση 107, αλλά για ράντα άμεση, πρόσκαιρη (μέχρι της ηλικίας των 60 ετών), μηνιαία, προκαταβλητέα.

110. $\overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{a}_{y:\overline{s-y}|} = \dfrac{\overset{(12)}{N}{}^{a}_{y:\overline{60 \text{ ή } 62-y}|} - \overset{(12)}{N}{}^{a}_{s:\overline{60 \text{ ή } 62-y}|}}{D^{a}_{y}}$: Παρούσα αξία ράντας άμεσης, πρόσκαιρης, μέχρι της ηλικίας **s**, μηνιαίας προκαταβλητέας γυναίκας ικανής ηλικίας **y**.

Στον παραπάνω τύπο δεν έχει σημασία αν θα πάρουμε σαν τελευταία ηλικία το 60ο ή το 62ο έτος, γιατί:

$$N^{a}_{y} - N^{a}_{S} = D_1 + D_2 + \ldots + D_\tau - (D_S + D_{S+1} + \ldots + D_\tau) =$$
$$= D_1 + D_2 + \ldots + D_{S-1},$$

όπου $\mathbf{D}_\tau$ αντιστοιχεί στην ηλικία 60 ή 62.

111. $\bar{C}^{a}_{y} = \ell^{a}_{y} \cdot q^{a}_{y} \cdot U^{y-20+\frac{1}{2}}$

112. $\bar{M}^{a}_{y:\overline{60-y}|} = \bar{C}^{a}_{y} + \bar{C}^{a}_{y+1} + \bar{C}^{a}_{59}$

113. $\bar{C}^{ai}_{y} = \ell^{a}_{y} \cdot i_y \cdot U^{y-20+\frac{1}{2}}$

114. $\bar{M}^{ai}_{y:\overline{60-y}|} = \bar{C}^{ai}_{y} + \bar{C}^{ai}_{y+1} + \ldots + \bar{C}^{ai}_{59}$

115. $D^{i}_{y} = \ell^{i}_{y} \cdot U^{y-20}$

116. $N^{i}_{y} = D^{i}_{y} + D^{i}_{y+1} + \ldots + D^{i}_{59} + N_{60}$

117. $\ddot{\mathbf{a}}^{i}_{y} = \dfrac{N^{i}_{y}}{D^{i}_{y}}$: Ράντα ζωής άμεση, ετήσια, προκαταβλητέα, γυναίκας ανίκανης, ηλικίας **y**.

118. Όπως η σχέση 116, αλλά για την περίπτωση μηνιαίας ράντας.

119. Όπως η σχέση 117 αλλά για ράντα μηνιαία.

Παρατήρηση: Επειδή από την ηλικία 60 ετών και μετά, δεν κάνουμε διάκριση του πληθυσμού σε ικανές και ανίκανες γυναίκες, οι ράντες των τύπων 117 και 119, από την ηλικία αυτή μετατρέπονται σε ράντες ικανότητας του πληθυσμού.

120. $N^{i}_{y:\overline{62-y}|} = D^{i}_{y} + D^{i}_{y+1} + \ldots + D^{i}_{61}$

121. $\mathbf{a}^{i}_{y} = \dfrac{N^{i}_{y:\overline{62-y}|}}{D^{i}_{y}}$: Παρούσα αξία ράντας άμεσης, πρόσκαιρης, μέχρι της ηλικίας των 62 ετών, ετήσιας, προκαταβλητέας γυναίκας ανίκανης ηλικίας y.

122. $\overset{(12)}{N}{}^{i}_{y:\overline{62-y}|}$: όπως η περίπτωση 120 αλλά για την περίπτωση μηνιαίας ράντας.

123. $\overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{i}_{y:\overline{62-y}|}$: όπως η περίπτωση του τύπου 121, αλλά για μηνιαία ράντα.

124. $D_y = \ell_y U^{y-20}$

125. $N_y = D_y + D_{y+1} + D_{y+2} + \ldots$

126. $\ddot{\mathbf{a}}_y = \frac{N_y}{D_y}$: Παρούσα αξία ράντας άμεσης, ετήσιας προκαταβλητέας, γυναίκας ικανής ή ανίκανης ηλικίας **y**.

127. $\overset{(12)}{\mathbf{N}}_y$ **:** όπως η σχέση 125 αλλά για περίπτωση δωδεκάμηνης ράντας.

128. $\overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_y$: όπως η σχέση 126, αλλά για περίπτωση μηνιαίας ράντας.

Οι στήλες 129, 130, 131, 132 και 133 είναι όπως οι στήλες 124, 125, 126, 127 και 128 διαφέρουν μόνο ως προς την ηλικία

134. $\mathbf{60 - y/a^a_y} = \frac{D^a_{60}}{D^a_y} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_{60}$: Παρούσα αξία ράντας μηνιαίας, μέλλουσα (αρχίζει από το 60ο έτος), προκαταβλητέας γυναίκας που φτάνει στην ηλικία των 60 ετών σαν ικανή.

134α. $\mathbf{62 - y/a^a_y} = \frac{D^a_{62}}{D^a_y} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_{62}$: Παρούσα αξία ράντας, μηνιαίας, μέλλουσας (αρχίζει από το 62ο έτος), προκαταβλητέας, γυναίκας που φτάνει στην ηλικία των 62 ετών σαν ικανή.

134β. $\mathbf{S - y/a^a_y} = \frac{D^a_S}{D^a_y} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}_S$: Παρούσα αξία ράντας μηνιαίας, μέλλουσας (αρχίζει από το 5-έτος), προκαταβλητέας, γυναίκας που φτάνει στην ηλικία **S** σαν ικανή.

135. $D^{ai}_y = \ell^a_y \cdot i_y \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{i}_{y+\frac{1}{2}} \cdot U^{y-20+\frac{1}{2}}$

136. $N^{ai}_y = D^{ai}_y + D^{ai}_{y+1} + \ldots + D^{ai}_{61}$

137. $S^{ai}_y = N^{ai}_y + N^{ai}_{y+1} + \ldots + N^{ai}_{61}$

138. $\mathbf{a^{ai}_y} = \frac{N^{ai}_y}{D^a_y}$: Παρούσα αξία ράντας άμεσης, μηνιαίας, προκαταβλητέας γυναίκας, ικανής στην περίπτωση που γίνει ανίκανη.

139. $s/\mathbf{a}^a_{y:\overline{62-S}|} = \frac{D^a_S}{D^a_y} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{i}_{S:\overline{62-S}|}$

140.

$$\mathbf{a}^{ai(S)}_{y:\overline{62-y}|} = \frac{1}{D^a_y}\left(\ell^a_y \cdot i_y \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{i}_{y+\frac{1}{2}:\overline{62-y-\frac{1}{2}}|} \cdot U^{y-20+\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \ell^a_{y+1} \cdot i_{y+1} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{i}_{y+\frac{3}{2}:\overline{62-y-\frac{3}{2}}|} U^{y+\frac{3}{2}} + \ldots + \ell^a_{S-1} \cdot i_{S-1} \cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{i}_{S-\frac{1}{2}:\overline{62-S+\frac{1}{2}}|}\right) :$$

Παρούσα αξία ράντας, μηνιαίας, προκαταβλητέας, πρόσκαιρης (μέχρι της ηλικίας των 62 ετών), γυναίκας ικανής, ηλικίας **y** στην περίπτωση που γίνει ανίκανη μέχρι της ηλικίας **S**.

141.

$$\mathbf{a}^{i}_{x/y} = \frac{1}{D^{i}_{x}\ell_{y}}\Big(\ell^{i}_{x}\cdot q^{i}_{x}\cdot \ell_{y+\frac{1}{2}}\cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{w+3wh}_{y+\frac{1}{2}}\cdot U^{x-20+\frac{1}{2}}+$$

$$+\ell_{x+1}q^{i}_{x+1}\cdot \ell_{y+\frac{3}{2}}\cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{w+3wh}_{y+\frac{3}{2}}\cdot U^{x-20+\frac{3}{2}}+\ldots):$$

Παρούσα αξία ράντας χηρείας γυναίκας ηλικίας **y**, συζύγου ανδρός ανίκανου ηλικίας **x**, όπου έχει συνυπολογισθεί 3-πλάσια αποζημίωση στην περίπτωση που ξανα - παντρευτεί.

Απόδειξη

$$\ell^{i}_{x}\mathbf{a}^{i}_{\frac{x}{y}} = \ell^{i}_{x}q^{i}_{x}\frac{\ell_{y+\frac{1}{2}}}{\ell_{y}}\cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{w+3wh}_{y+\frac{1}{2}}\cdot U^{\frac{1}{2}}+\ell^{i}_{x+1}q^{i}_{x+1}\frac{\ell_{y+1+\frac{1}{2}}}{\ell_{y}}\cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{w+3wh}_{y+1+\frac{1}{2}}\cdot U^{1+\frac{1}{2}}+$$

$$+\ell^{i}_{x+2}q^{i}_{x+2}\frac{\ell_{y+2+\frac{1}{2}}}{\ell_{y}}\cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{w+3wh}_{y+2+\frac{1}{2}}\cdot U^{2+\frac{1}{2}}+\ldots \Rightarrow \ell^{i}_{x}U^{x}\mathbf{a}^{i}_{\frac{x}{y}} =$$

$$=\frac{1}{\ell_{y}}\Big(\ell^{i}_{x}\cdot q^{i}_{x}\cdot \ell_{y+\frac{1}{2}}\cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{w+3wh}_{y+\frac{1}{2}}\cdot U^{\bar{x}-20+\frac{1}{2}}+$$

$$+\ell^{i}_{x+1}\cdot q^{i}_{x+1}\ell_{y+\frac{3}{2}}\cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{w+3wh}_{y+\frac{3}{2}}\cdot U^{x-20+\frac{3}{2}}+\ldots)\Rightarrow$$

$$\mathbf{a}^{i}_{x/y} = \frac{1}{D^{i}_{x}\ell_{y}}\Big(\ell^{i}_{x}\cdot q^{i}_{i}\cdot \ell_{y+\frac{1}{2}}\cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{w+3wh}_{y+\frac{1}{2}}\cdot U^{x-20+\frac{1}{2}}+$$

$$+\ell^{i}_{x+1}\cdot q^{i}_{x+1}\ell_{y+\frac{3}{2}}\cdot \overset{(12)}{\ddot{\mathbf{a}}}{}^{w+3wh}_{y+\frac{3}{2}}\cdot U^{x-20+\frac{3}{2}}+\ldots)$$

1.3. Υπολογισμός ασφαλίστρου (εισφοράς) για τους ιδρυτές του ασφαλιστικού ταμείου

Έστω ότι η κατανομή των ασφαλισμένων σε ταμείο σύνταξης κατά το χρόνο της ίδρυσής του από άποψη ηλικίας έχει ως εξής:

$\mathbf{K_\alpha}$ = ο αριθμός των ασφαλισμένων στο ταμείο ηλικίας $\boldsymbol{\alpha}$

$\mathbf{K_{\alpha+1}}$ = ο αριθμός των ασφαλισμένων στο ταμείο ηλικίας $\boldsymbol{\alpha + 1}$

$\mathbf{K_{\alpha+2}}$ = ο αριθμός των ασφαλισμένων στο ταμείο ηλικίας $\boldsymbol{\alpha + 2}$

$\mathbf{K_z}$ = ο αριθμός των ασφαλισμένων στο ταμείο ηλικίας $\mathbf{z}$

όπου: $\boldsymbol{\alpha}$ και $\mathbf{z}$ η μικρότερη και μεγαλύτερη ηλικία

Οι παραπάνω ασφαλισμένοι έστω ότι εξέρχονται από το ταμείο κατά τη συμπλήρωση του 65ου έτους.

Έστω επίσης ότι:

α) Κάθε ασφαλισμένος, όταν καταστεί ανίκανος, παίρνει σύνταξη **(y)** και τόσες ετήσιες προαυξήσεις **(ε)**, όσα είναι τα έτη ενεργού συμμετοχής στην ασφάλιση, μετά τη συμπλήρωση του πρώτου έτους αν καταστεί ανίκανος, δηλαδή το πρώτο έτος παίρνει σύνταξη $\mathbf{y}$, το δεύτερο έτος παίρνει $\mathbf{y + \varepsilon}$, το τρίτο έτος παίρνει $\mathbf{y + 2\varepsilon}$ και τέλος $\mathbf{y + \varepsilon \cdot s}$, αν καταστεί ανίκανος κατά τη συμπλήρωση του $\mathbf{x + s}$ έτους της ηλικίας του και πριν να συμπληρώσει το $\mathbf{x + s + 1}$ έτος της ηλικίας:

$$x + s + 1 = 65$$

β) Αν ο ασφαλισμένος συμπληρώσει το 65ο έτος της ηλικίας του ως ικανός, τότε παίρνει σύνταξη **(y)** νομισματικές μονάδες και τόσες ετήσιες προσαυξήσεις **(ε)**, όσα είναι τα πέρα από ένα έτος έτη συμμετοχής του στην ασφάλιση.

γ) Αν ο ασφαλισμένος πεθάνει, τότε η χήρα και τα ορφανά θα πάρουν ένα ποσοστό της σύνταξης.

Η παρούσα αξία ετήσιας εισφοράς μίας (1) νομισματικής μονάδας, που καταβάλλεται από έναν ικανό, από το έτος x μέχρι το 65ο έτος συμβολίζεται με

$$\mathbf{a}^{a}_{x:\overline{65-a|}} = \frac{N^a_x - N^a_{65}}{D^a_x}$$

Επομένως, η παρούσα αξία ασφαλίστρου (εισφορά) 1 νομισματικής μονάδας για όλους τους ασφαλισμένους θα είναι:

$$B_0 = K_\alpha \cdot \mathbf{a}^{a}_{\alpha:\overline{65-\alpha|}} + K_{\alpha+1} \cdot \mathbf{a}^{a}_{\alpha+1:\overline{65-\alpha-1|}} +$$

$$+K_{\alpha+2} \cdot \mathbf{a}^{a}_{\alpha+1:\overline{65-\alpha-2}|} + \ldots + K_z \cdot \mathbf{a}^{a}_{z:\overline{65-z}|} \Rightarrow$$

$$B_0 = \sum_{x=\alpha}^{z} K_x \cdot \mathbf{a}^{a}_{x:\overline{65-x}|}$$

Αν υποθέσουμε ότι, για κάθε ασφαλισμένο η σταθερή εισφορά είναι **p** (ασφάλιστρο), η συνολική παρούσα αξία αυτής για το σύνολο των ασφαλισμένων θα είναι:

$$p \cdot B_0 = p \cdot \sum_{x=\alpha}^{z} K_x \cdot \mathbf{a}^{a}_{x:\overline{65-x}|}$$

Η παρούσα αξία συντάξεων λόγω ανικανότητας

Αν **x** είναι η ηλικία του ασφαλισμένου κατά την ίδρυση του ταμείου, τότε η παρούσα αξία της σύνταξης ανικανότητας για τον ασφαλισμένο **x** ετών, θα είναι:

$$\mathbf{a}^{a_i}_{x} = \frac{[y \cdot N^{\alpha i}_{x} + \varepsilon(S^{\alpha i}_{x+1} - S^{\alpha i}_{65})]}{D^{a}_{x}}$$

και η παρούσα αξία των συντάξεων ανικανότητας όλων των ασφαλισμένων θα είναι:

$$E_0 = \sum_{x=\alpha}^{z} \frac{K_x}{D^{a}_{x}} [y \cdot N^{\alpha i}_{x} + \varepsilon(S^{\alpha i}_{x+1} - S^{\alpha i}_{65})]$$

Η παρούσα αξία σύνταξης λόγω γήρατος

Εάν έχουμε ένα ασφαλισμένο ικανό ηλικίας **x**, η σύνταξη λόγω γήρατος για τον παραπάνω ασφαλισμένο στην αρχή της ασφάλισης είναι σύνταξη μέλλουσα και αν υποτεθεί ότι η ηλικία εξόδου για σύνταξη γήρατος είναι **s**, όπου $\mathbf{s = x + n}$, θα έχουμε την παρούσα αξία

$$s - x/\mathbf{a}^{a}_{x} = [1 + \varepsilon(S - x - 1)] \frac{N^{\alpha}_{S}}{D^{\alpha}_{x}}$$

εάν δε η σύνταξη είναι μέλλουσα κατά $\mathbf{65 - x}$ έτη και το ποσό είναι $\mathbf{1} + \varepsilon(\mathbf{64 - x})$, η παρούσα αξία της είναι:

$$65 - x/\mathbf{a}_x^{\alpha} = [1 + \varepsilon(64 - x)]\frac{N_{65}^{\alpha}}{D_x^{\alpha}}$$

εάν η βασική σύνταξη είναι μία νομισματική μονάδα, εάν όμως η σύνταξη είναι **y** νομισματικές μονάδες, θα έχουμε:

$$[y + \varepsilon(64 - x)]\frac{N_{65}^{\alpha}}{D_x^{\alpha}}$$

Η παρούσα αξία όλων των συντάξεων γήρατος θα είναι:

$$Z_0 = \sum_{x=\alpha}^{z} \frac{K_x}{D_x^{\alpha}}[y + \varepsilon(64 - x)]N_{65}^{\alpha}$$

Η παρούσα αξία των συντάξεων χήρας

Η παρούσα αξία της σύνταξης χήρας ασφαλισμένου ηλικίας **x** για πρόσκαιρη ράντα δίδεται από τη σχέση:

$$\mathbf{a}_x^{\alpha w} = y \cdot N^{\frac{mtmd''e(S_{x+1}^{\alpha w} - S_{65}^{\alpha w})}{D_x^{a}}}$$

$(\mathbf{x} + \mathbf{s} + \mathbf{1} = \mathbf{65})$ και, επομένως, η παρούσα αξία των συντάξεων χήρας όλων των ασφαλισμένων, εφόσον η σύνταξη είναι **y** νομισματικές μονάδες θα είναι:

$$H_0 = \sum_{x=\alpha}^{z} \frac{K_x}{D_x^{a}}[y \cdot N_x^{\alpha w} + \varepsilon(S_{x+1}^{\alpha w} - S_{65}^{\alpha w})]$$

Η παρούσα αξία όλων των ηλικιών για τα ορφανά θα είναι:

$$\Theta_0 = \sum \frac{K_x}{D_x^{a}}[y \cdot N_x^{\alpha\kappa} + \varepsilon(S_{x+1}^{\alpha\kappa} - S_{65}^{\alpha\kappa})]$$

Στη συνέχεια θέτουμε: